

膜片联轴器挠性元件刚度计算

洪 成 文

[提要] 本文提出了膜片联轴器挠性元件的刚度计算方法。该计算方法已成功地应用于设计制造中。

主题词 联轴器 刚度计算

前 言

在设计膜片联轴器的时候,设计者必须了解下述两个情况:

1. 联轴器在工作时各零件的应力——联轴器的内特性。
2. 联轴器的各种刚度——联轴器的外特性。

对于应力指标,它只是作为联轴器工作时的可靠性依据,是属于设计者所掌握的。这些数据并不一定要向用户发表。但是对于联轴器的外特性,不仅设计者要掌握,还要向用户发表,因为它将直接影响与联轴器相连的设备可靠安全的运行。

在某些场合,(例如要求很小的角变形刚度或轴向变形刚度)联轴器的外特性是至关重要的。

联轴器的刚度是由组成联轴器且又参与变形的零件刚度所构成,但是对于联轴器一般的零件(传扭螺栓,法兰及中间轴等),它们的变形皆可从通用技术资料中获得。故本文仅就膜片——这一新零件的刚度加以讨论,供读者们参考。

一、膜片的扭转刚度

在扭矩的作用下,膜片会发生图1所示的变形——压缩段缩短或弓起,而拉伸段会伸长,于是主动螺栓便会由位置I转到位置II。

扭转刚度的计算就是计算在扭矩 M 的作用下扭转角 $\Delta\theta$ 。

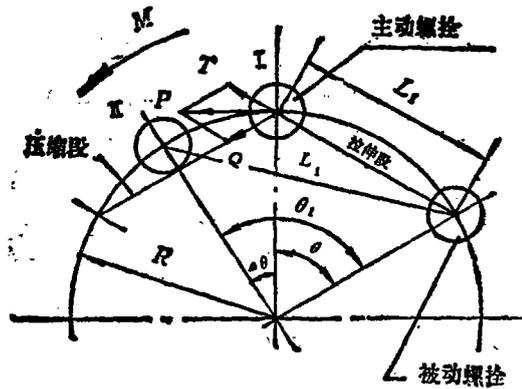


图 1

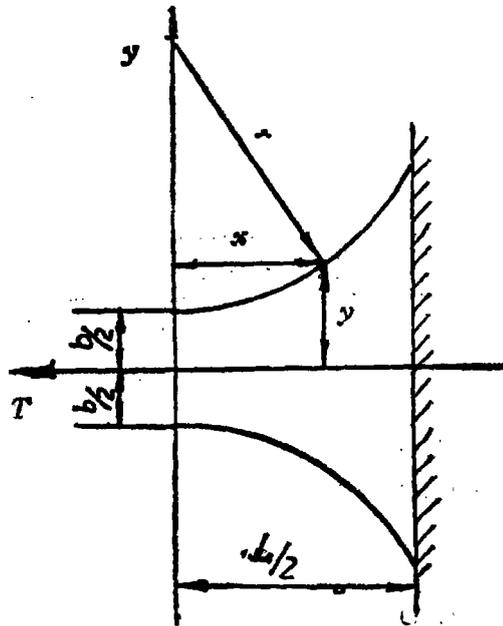


图 2

对于束腰型膜片：拉伸段在 T 力作用下的变形可按图2计算。

在图2中：1/2膜片段的微元伸长

$$d\delta = \frac{T dx}{E Ax}$$

式中： Ax ——截面积

E ——抗拉弹性膜数

$Ax = 2yh$

h ——膜片厚度

T ——膜片所受拉力

$$y = r + \frac{b}{2} - \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{令： } r + \frac{b}{2} = c$$

$$\text{所以： } y = c - \sqrt{r^2 - x^2}$$

整个拉伸段的绝对伸长为：

$$2 \int d\delta = \frac{T}{Eh} \int_0^{L/2} \frac{dx}{c - \sqrt{r^2 - x^2}}$$

积分并整理后得：

$$\begin{aligned} 2\delta &= \frac{T}{Eh} \left[-\sin^{-1} \frac{L_1}{2r} + \right. \\ &+ \left. \left(r + \frac{b}{2} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{\left(r + \frac{b}{2} \right)^2 - r^2}} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left. \text{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{2r + \frac{b}{2}}{\frac{b}{2}}} \text{tg} \frac{\sin^{-1} \frac{L_1}{2r}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

变形后拉伸段长度 L' 为(见图1)

$$L' = L_1 + 2\delta$$

$$\text{且 } \theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{2R^2 - L_1'^2}{2R^2} \right) =$$

$$= \cos^{-1} \left(1 - \frac{L_1'^2}{2R^2} \right)$$

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta$$

整个挠性元件的扭转刚度即为

$$C_M = MZ / \Delta\theta$$

其中 Z ——膜片层数

二、膜片的轴向刚度

膜片在轴向变形时，整个膜片的变形情况及力学简图如图3、图4。

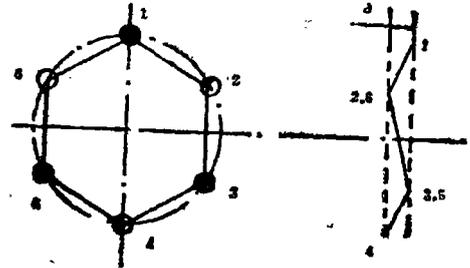


图 3

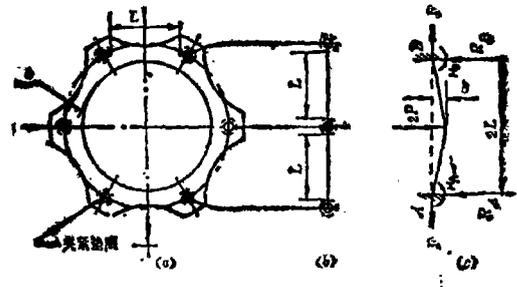


图 4

在图4c中，由于其对称性，可得：

$$R_A = R_B \quad M_A = M_B$$

于是，为了简化起见，我们可以将图4c只画其一半而成为图5

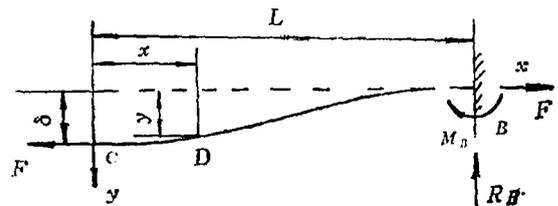


图 5

为了求解的方便，我们将作出如下假设：

1) 把变截面的膜片段看成是等截面的，

即： $I_x = \cos t = I = bh^3/12$ ； $Ax = Ac = bh$

2) 按小挠度来考虑。

根据图 5 我们可以列出这一段膜片段的挠曲方程, 即:

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Fy + M_B - P_z(L-x) \quad (1)$$

式(1)的解为:

$$y = c_1 \cosh(tx) + c_2 \sinh(tx) + Ax + B \quad (2)$$

c_1 和 c_2 可以从边界条件中得出。

将式(2)代入式(1)得:

$$\begin{aligned} EIc_1 t^2 \cosh(tx) + EIc_2 t^2 \sinh(tx) &= \\ = Fc_1 \cosh(tx) + Fc_2 \sinh(tx) + FAx + \\ + FB + P_z x - M_B - P_z L \quad (3) \end{aligned}$$

比较上述方程两边的系数得:

$$A = -P_z/F \quad B = \frac{P_z L - M_B}{F}$$

$$t = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (4)$$

式(3)的边界条件是: 在梁的中点, 即 $x=0$ 的点(C点)及嵌固点(B点)的转角 $\theta=0$, 即:

$$\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} = 0$$

$$\text{故 } C_1 = \frac{P_z}{F} \left(\frac{1 - \cosh(tL)}{t \sinh(tL)} \right)$$

$$= -\frac{P_z}{tF} \operatorname{tgh} \left(\frac{tL}{2} \right)$$

$$C_2 = -\frac{A}{t} = \frac{P_z}{tF}$$

求未知弯矩 M_B , 并注意到 $y_{x=L} = 0$ 所以:

$$-\frac{P_z}{tF} \operatorname{tgh} \left(\frac{tL}{2} \right) \cosh(tL) + \frac{P_z}{tF} \sinh(tL) -$$

$$-\frac{M_B}{F} = 0$$

以及:

$$\begin{aligned} M_B &= -\frac{P_z}{t} \left[\frac{\cosh(tL) - 1}{\sinh(tL)} \cosh(tL) - \right. \\ &\quad \left. - \sinh(tL) \right] = \frac{P_z}{t} \operatorname{tgh}(tL) \quad (5) \end{aligned}$$

把 $A \cdot B = f(M_B)$, C_1 及 C_2 代入公式(2)得:

$$\begin{aligned} y &= \frac{P_z}{Ft} \left\{ \sinh(tx) - \operatorname{tgh} \left(\frac{tL}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left[1 + \cosh(tx) \right] \right\} + \frac{P_z}{F} (L-x) \quad (6) \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时, 最大挠度 $y_{max} = \delta$ 所以按公式(6)可写成:

$$\delta = \frac{P_z L^3}{4EI} \eta(u) \quad (7)$$

式中:

$$\eta(u) = \frac{u - \operatorname{tgh} u}{u^3}, \quad u = \frac{tL}{2} \quad (8)$$

如果按一般的常规梁来考虑, 忽略变形后弹性线的长度与变形前长度之间的差值(也就是说不计因中性层的伸长而引起的膜片段纵向的拉力 F), 这时, $F=0$, $t=0$ 。我们可以把这样的梁称为刚性梁(而区别于我们所讨论的挠性梁)。于是:

$$\eta(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u - \operatorname{tgh} u}{u^3} \right) = \frac{1}{3}$$

那么:

$$\delta = \frac{P_z L^3}{12EI}$$

从上式可以看到, 轴向位移对轴向负荷是一种简单的线性关系, 而我们所讨论的挠性梁轴向位移对轴向负荷是一种非线性关系, 这便是两种梁的根本区别。

在图 5 中, 梁弹性线长度是:

$$S = \int_0^L \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx$$

如果按小挠度理论来考虑, 那么 $\frac{dy}{dx}$ 项与 1 相比是很小的, 可根据二项式定理而略去二次方以后诸项, 那么:

$$S \approx \int_0^L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx$$

$$= L + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

因而梁在挠曲后长度上的增加量为:

$$\Delta L = S - L = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (9)$$

因弹性线斜率较小, 且假设梁是等截面的, 故认为轴向力沿梁长是不变的, 因此:

$$F = A_c E \frac{\Delta L}{L} = \frac{A_c E}{2L} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \cdot dx$$

(10)

求式(2)的导数并将之平方后代入式(10), 得

$$F = \frac{A_c E}{2L} \left\{ (C_1^2 + C_2^2) \frac{t}{4} \sinh(2tL) + (C_2^2 +) \frac{t^2 L}{2} + C_1 C_2 t [\cosh(2tL) - 1] / 2 + 2AC_1 [\cosh(tL) - 1] + 2AC_2 \sinh(tL) \right\}$$

将前面已经导出的 C_1 、 C_2 及 A 值代入上式整理后便得:

$$F^3 = \frac{A_c E P_z^2}{2} \left[\frac{1}{4tL} \xi(u) - \frac{1}{2} \operatorname{tgh} u^2 + \frac{3}{2} \right]$$

(11)

式中:

$$\xi(u) = \operatorname{tgh}^2 \left(\frac{tL}{2} \right) \sinh(2tL) + \sinh(2tL) + 2 \operatorname{tgh} \left(\frac{tL}{2} \right) - 2 \operatorname{tgh} \left(\frac{tL}{2} \right) \cosh(2tL) + 8 \operatorname{tgh} \left(\frac{tL}{2} \right) \cosh(tL) - 8 \operatorname{tgh} \left(\frac{tL}{2} \right) - 8 \sinh(tL)$$

因为:

$$\operatorname{tgh} \left(\frac{tL}{2} \right) = \frac{\cosh(tL) - 1}{\sinh(tL)} = \frac{\sinh(tL)}{\cosh(tL) + 1}$$

故 $\xi(u)$ 可以简化为:

$$\xi(u) = -12 \operatorname{tgh} \left(\frac{tL}{2} \right)$$

那么: 式(11)可以写成:

$$F^3 = \frac{A_c E P_z^2}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 u - \frac{3 \operatorname{tgh} u}{2 u} \right]$$

(11a)

因为: $F = E I t^2$

$$\text{故: } P_z = \left(\frac{2F^3}{A_c E} \right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 u - \frac{3 \operatorname{tgh} u}{2 u} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

(12)

$$\text{或者: } P_z = \frac{8EI(2I/A_c)^{\frac{1}{3}}}{L^3} u^3 \times$$

$$\times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 u - \frac{3 \operatorname{tgh} u}{2 u} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

将上式及式(8)代入式(7)后:

$$\delta = 2 \left(\frac{2I}{A_c} \right)^{\frac{1}{3}} \left(u - \frac{1}{2} \operatorname{tgh} u \right) \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 u - \frac{3 \operatorname{tgh} u}{2 u} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

(13)

于是, 膜片组件在轴向位移时的刚度则为:

$$C_s = \frac{2znP_z}{\delta} = \frac{8ZnEI}{L^3} \cdot \frac{u^3}{u - \operatorname{tgh} u}$$

(14)

n = 膜片螺栓数

三、膜片的角度变形刚度

膜片在补偿角位移时, 膜片的本身变形是呈周期性变化的, 所以刚度也是呈周期性

变化。为此联轴器角变形刚度应按最大变形时的最大刚度给出。也可同时给出最小刚度以作参考。

膜片在补偿角向偏移时最小变形及最大变形情况如图6, 图7所示:

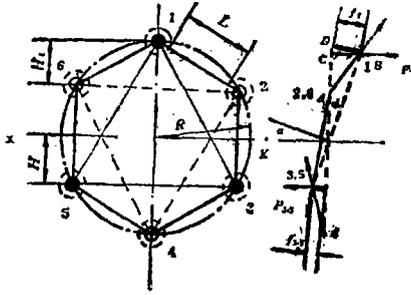


图 6

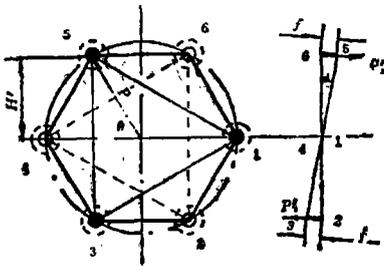


图 7

从图中我们可以看到: 如果我们不计膜片微小的(1/2°左右)扭转变形及膜片段纵向拉伸(如图6中虚线所示的力)时角变形刚度的影响(事实上这两者均很小), 那么膜片的变形情况与我们讨论的轴向位移情况是十分相似的。所以我们可以直接引用在轴向位移讨论中所得的一些结果。

在图6中:

$$f_1 = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad f_{3..5} = 2H \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{令: } f_1 = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{8I}{A_c} \right)^{\frac{1}{2}} (u - \text{tgh}u) \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \text{tgh}^2 u - \frac{3 \text{tgh}u}{2u} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

那么, 包括1—2及1—6膜片段在内的这一

段“梁”所产生的力 P_1 为:

$$P_1 = 2 \frac{8EI(2I/A_c)^{\frac{1}{2}}}{L^3} u^3 \times$$

$$\times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \text{tgh}^2 u - \frac{3 \text{tgh}u}{2u} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

按同样方法, 我们可以得出包括2—3及3—4膜片段和包括4—5及5—6膜片段“梁”在 $f_{3..5}$ 情况下的变形力 $P_{3..5}$, 即:

$$f_{3..5} = 2H \sin \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{8I}{A_c} \right)^{\frac{1}{2}} (u - \text{tgh}u)$$

$$\times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \text{tgh}^2 u - \frac{3 \text{tgh}u}{2u} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$P_{3..5} = 2 \frac{8EI(2I/A_c)^{\frac{1}{2}}}{L^3} u^3 \times$$

$$\times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \text{tgh}^2 u - \frac{3 \text{tgh}u}{2u} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

注意: 此时的 u 值应是对应于 $f_{3..5}$ 所得, 为使公式连贯, 整洁此处不加注脚区别。以下讨论亦同。

于是, 膜片最小角变形刚度为:

$$C_{\dots} = \frac{P_1 R \cos \alpha + 2P_{3..5} H \cos \alpha}{\alpha} Z$$

在图7中, 我们可以看到角位移时最大刚度情况。

在图中, 参与变形的膜片段是有4—5, 5—6及2—3, 3—4四个膜片段。其变形量为:

$$f_{\dots} = 2H' \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{令: } f_{\dots} = 2H' \sin \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{8I}{A_c} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times (u - \text{tgh}u) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \text{tgh}^2 u - \frac{3 \text{tgh}u}{2u} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

于是, 包括4—5, 5—6(或者2—3, 3—4)膜片段在内所产生的变形力 P' 为:

$$P'_1 = 2 \frac{8EI(2I/A_c)^{\frac{1}{2}}}{L^3} u^3 \times$$

$$\times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 u - \frac{3 \operatorname{tgh} u}{2u} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

膜片在补偿角位移时的最大刚度:

$$C_{\max} = \frac{2P'_1 H' \cos \alpha}{a} Z$$

四、膜片的径向刚度

膜片的径向刚度在其工作过程中也是一

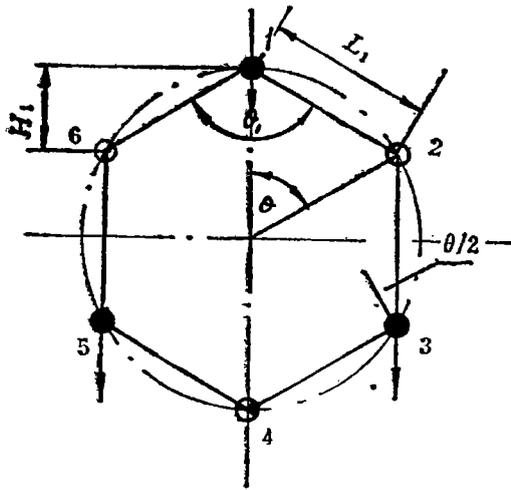


图 8

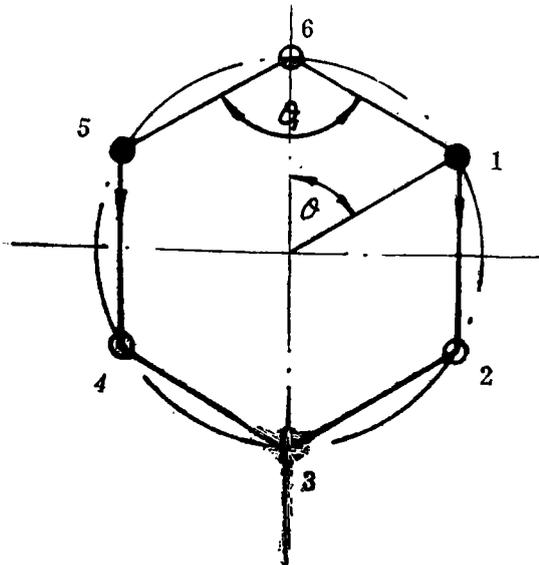


图 9

个波动值, 随膜片段所处的位置而变化。

图 8 及图 9 给出了最大刚度及最小刚度所处的位置。

在图 8 中, 我们可以把整个膜片分成三个结构来分析。其中 2—3—4 与 4—5—6 结构是相同的。

这三个结构在单位位移所能承受的径向力的总和即为膜片的径向刚度。

在 6—1—2 结构中, 它的承载能力受到稳定性的限制, 为此必须按稳定理论校核其临界负荷。

6—1—2 结构的实际图形如图 10(a) 所示。它的可能的弯曲方向是垂直于纸面。为了便于计算在厚度相同的情况下, 我们可以把图 10(a) 的形式简化成图 10(b) 的形式。

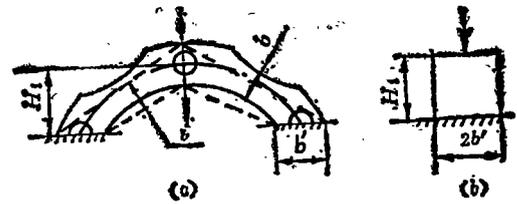


图 10

因为: $b' = b / \sin \theta / 2$, $H_1 = L_1 \sin \theta / 2$ $I' = 2b'h^3 / 12$ 所以, 6—1—2 结构的临界负荷为: $\pi^2 EI' / H_1^2$

2—3—4 (或者 4—5—6) 结构的变形如图 11 所示。

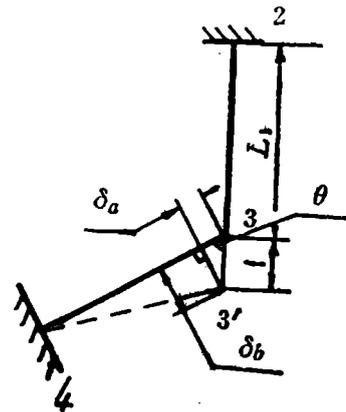


图 11

在这个结构中，2—3杆所受的拉力： 为：

$$P = \frac{Z A_c}{L_1} \times 1$$

$$T' = \frac{E A_c}{L_1} \delta_b, \quad \delta_b = \sin\theta \times 1$$

3—4杆所受的压力及弯曲力：

$$T = \frac{\pi^2 E I}{L_1^2}$$

$$Q' = \frac{3 E I_b \delta_a}{L_1^3}, \quad \delta_a = \cos\theta \times 1$$

$$Q = \frac{3 E I_b \delta_b}{L_1^3}, \quad \delta_b = \sin\theta \times 1$$

上述二力在4—5方向的合力为

$$T' \cos\theta + Q' \sin\theta$$

在2—3—4结构中，它的变形情况如

图13所示。

$$I_b = \frac{h b^3}{12}$$

上述二个力在2—3杆上的合力为：

$$T \cos\theta + Q \sin\theta$$

所以，膜片组的最大径向刚度为：

$$C_{y_{max}} = \left[\frac{\pi^2 E I'}{H_1^2} + 2 \left(\frac{\pi^2 E I}{L_1^2} \cos\theta + \frac{E A_c}{L_1} + \frac{3 E I_b \delta_b}{L_1^3} \sin\theta \right) \right] Z$$

图9中所示的膜片也可按三个结构来分析其中6—1—2与6—5—4结构是相同的。

6—5—4（或6—1—2）结构的变形如图12所示，

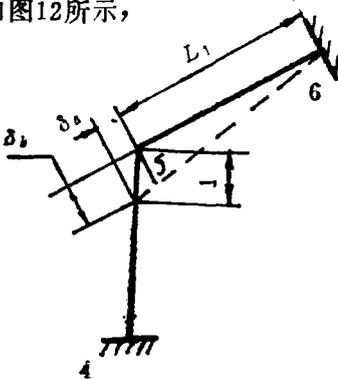


图 12

4—5杆所能承受的负荷仍可按压杆的临界负荷形式给出，即：

$$P' = \frac{\pi^2 E I}{L_1^2}$$

5—6杆所能承受的拉力及弯曲力分别

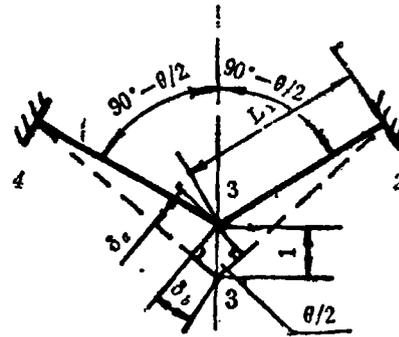


图 13

在图13中，2—3杆（3—4杆亦同）的拉伸与弯曲力分别为：

$$T'' = \frac{E A_c}{L_1} \delta'_b, \quad \delta'_b = 1 \times \sin\theta/2$$

$$Q'' = \frac{3 E I_b}{L_1^3} \delta'_a, \quad \delta'_a = 1 \times \cos\theta/2$$

上述二力在中分线方向的合力为

$$T'' \cos\theta/2 + Q'' \sin\theta/2$$

整个结构的变形力在中分线方向的合力为

$$2 \left(T'' \cos \frac{\theta}{2} + Q'' \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

膜片组的最小径向刚度可表达为：

$$C_{y_{min}} = \left[2 \left(\frac{\pi^2 E I}{L_1^2} + T' \cos\theta + Q' \sin\theta \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2\left(T'' \cos \frac{\theta}{2} + Q'' \sin \frac{\theta}{2}\right) Z \\
= & Z \left[2\left(\frac{\pi^2 EI}{L_1^3} + \frac{EA_c}{L_1} \delta_b \cos \theta + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3EI_b}{L_1^3} \delta_a \sin \theta\right) + 2\left(\frac{EA_c}{L_1} \delta'_c \cos \frac{\theta}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3EI_b}{L_1^3} \delta'_d \sin \frac{\theta}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

五、结束语

根据对某型联轴器的刚度计算，我们可以得到下列结果：

扭转刚度 2.64×10^4 公斤米/度

轴向刚度 340公斤/毫米

角向刚度 • 最大4.29公斤米/度
最小3.02公斤米/度

径向刚度 最大 9.2×10^6 公斤/厘米
最小 6.28×10^5 公斤/厘米

• 是指在位移为2mm时的对应值。

由此可以看到：扭转刚度和径向刚度是很大的。特别是径向刚度已经接近一般滚动轴承的刚度，而轴向刚度及角向刚度却小得多，这便是膜片联轴器最突出的特点。

参 考 资 料

洪成文：《叠层式膜片挠性联轴节轴向位移时引起的轴向力及应力计算》

国外舰船技术，锅炉透平 1933年第四期 P30—34

（上接第53页）

LM1600IR 间冷回热发动机。F404/LM1600IR 的最初发展目标是25000轴马力，随后提高到30000轴马力。预期F404/LM1600IR 发动机的热效率变化较平坦，对典型的驱逐舰和护卫舰来说，至少可节约30%的燃油，这可使F404/LM1600IR 发动机处于同柴油机很有竞争力的地位。

同样形式的第Ⅱ阶段合同也给了罗耳斯·罗伊斯/艾里逊集团。第Ⅲ阶段的工作预计在1987年内开始，将提供一台生产型的间冷回热发动机。

LM500在船上应用

LM500发动机系由TF34航空涡轮风扇

发动机派生，是一种双轴、简单循环（压比14.5）、前端输出的燃气轮机。

丹麦皇家海军已选定美国GE公司的LM500燃气轮机作为他们Standard FLEX300计划的动力装置，这标志着LM500燃气轮机第一次在海上应用。

丹麦海军计划到90年代中期共建16条STANDARD FLEX 300船，首批七条已购买了LM500。船舶的推进系统采用CODAG布置，一台LM500在一侧，一台柴油机在另一侧。

（雪友根据 GEM&I HIGHLIGHTS 1986.4 报导）

Abstract

The existing problems of the MSB marine main boiler have been analysed in this paper and relevant improved versions presented. Detailed structural designs have been performed for various versions and their characteristic features compared and discussed on the basis of weighing the pros and cons. All the proposed versions are available for practical use or for reference. Under the present conditions, the author has recommended the use of an improved version consisting of the original boiler design with its length and height being moderately increased. This improved version is relatively practical and realistic and has the advantages of introducing only a small amount of modifications with greater benefits being attained.

- 3. Refuse and garbage-firing boilers - I. fuel
 Translated by *Li Junshao* (27)

POWER TRANSMISSION DEVICES

- 6. Rigidity calculation of diaphragm coupling flexible elements
 *Hong chengwen* (32)

Abstract

A method for calculating the rigidity of diaphragm coupling flexible elements is presented in this paper. The method described here has been successfully used for design and manufacturing purposes.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION

- 7. The strength and service life verification tests of a newly designed third stage turbine rotor and disc of Type A and Type A-1 engine
 *Sun Guowei, Jin Shumin, Liu Lianyuan* (40)

Abstract

This paper describes a series of overtemperature, overspeed, fracture speed and low-cycle fatigue tests conducted on the newly designed third stage turbine rotor and disc in connection with the engine design, modification, finalization and service life assessment. The test results have already been put into use as major reference data during the engine design, finalization and determination of turbine disc guaranteed life.

MICROCOMPUTER APPLICATION TECHNIQUES

- 8. A microcomputer control system for the GZKL-10-3 boiler
 *Lu Zhenlin, Ma Shaoliu, Chen Gang, Zhang Qian* (47)

Abstract

In this paper a description has been given of the components and functions of the GZKL-10-3 boiler microcomputer control system, its software as well as general monitoring and control-regulating principles. It has been