

挠性膜盘联轴器设计及其优化

王心丰

(南京航空学院)

〔提要〕本文对挠性膜盘联轴器进行了优化设计,优化的目标可以是重量最轻,也可以是在给定的外载荷情况下,膜盘的结构最大工作应力最小。

主题词: 联轴器, 优化, 设计。

一、概 述

随着现代工业技术的飞速发展,在高速大功率旋转机械间正确连接方法的选择,导致了各种新型高性能挠性联轴器的不断出现。挠性膜盘联轴器就是其中的一种,它不但可补偿两轴的径向、轴向和角偏移等不对中情况,而且还有无需润滑、减缓冲击振动、重量轻、可靠性比较高,寿命长,等一系列的优点,因而被广泛采用。图1为一种双膜盘联轴器的结构图。

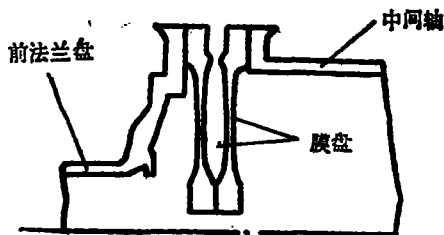


图1 双膜盘挠性联轴器结构图

性。下面分几方面情况加以论述。

本文对挠性膜盘联轴器进行了优化设计,它不但满足了各项约束条件,而且从许多的可行方案中选出重量最轻或在给定的外载荷情况下,使其最大应力达到最小。重量问题对于高速旋转的机械来讲是一至关重要的问题。而最大应力达到最小又具有“安全可靠”的因素,通过实例的计算表明这两者具有一定的吻合性。

二、设计原则

1、一般情况下膜盘联轴器要承受传递的扭矩引起的剪应力,轴向位移引起的弯曲应力、角位移引起的弯曲应力,离心力引起的应力以及因环境温度的影响引起的热应力。下面分别说明各种应力的计算方法。

(1) 膜盘轴向变形所引起的弯曲应力的计算

假设: ① 变形为小变形,圆盘中性平面的伸长忽略不计。

② 符合平面假设,即弯曲前垂直于中性平面的盘内直线,弯曲变形后仍保持直线。

本文收到日期: 1988年元月18日。注: 本文为1987年度“中国航空学会第四届航空发动机强度年会”宣读论文

③假定膜盘轮缘与法兰盘为固支联接。

根据以上假设求其一个变刚度的圆盘的弯曲微分方程式并求得满足边界情况的解。

可求得沿径向任意半径为 r 处的径向应力 $\sigma_{a,r}$ 和切向应力 $\sigma_{s,r}$ [1]

$$\sigma_{a,r} = -\frac{E t_s}{2(1-\nu^2)a^2} \left[K_{s,1} \rho_1 (\rho_1 + \nu - 1) \left(\frac{r}{a}\right)^{\rho_1} + K_{s,2} \rho_2 (\rho_2 + \nu - 1) \left(\frac{r}{a}\right)^{\rho_2} + K_{s,3} \rho_3 (\rho_3 + \nu - 1) \left(\frac{r}{a}\right)^{\rho_3} \right] \frac{X}{\left(\frac{r}{a}\right)^{2+n}} \quad (\text{kPa})$$

$$\sigma_{s,r} = -\frac{E t_s}{2(1-\nu^2)a^2} \left\{ K_{s,1} \rho_1 [(\rho_1 - 1)\nu + 1] \left(\frac{r}{a}\right)^{\rho_1} + K_{s,2} \rho_2 [(\rho_2 - 1)\nu + 1] \left(\frac{r}{a}\right)^{\rho_2} + K_{s,3} \rho_3 [(\rho_3 - 1)\nu + 1] \left(\frac{r}{a}\right)^{\rho_3} \right\} \frac{X}{\left(\frac{r}{a}\right)^{2+n}} \quad (\text{kPa})$$

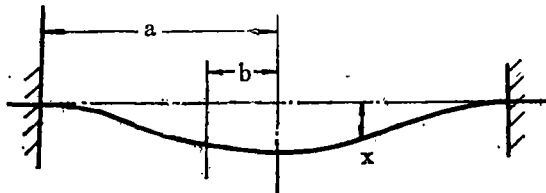


图 2 膜盘轴向变形时的受力模型

(2) 膜盘偏斜角位移引起的弯曲应力的计算方法

根据以上同样的假定，根据不同的边界情况和不同的受力情况，求得了在偏斜角位移情况下，任意半径 r 处的径向应力 $\sigma_{r,s}$ 和切向应力 $\sigma_{\theta,s}$ ，推导过程详见参考资料[1]。

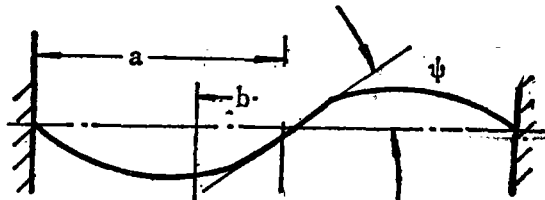


图 3 膜盘偏斜角位移受力模型

$$\sigma_{r,s} = -\frac{\pi E t_s}{360(1-\nu^2)a} \left[K_{b,1} (\alpha_1 - 1) (\alpha_1 + \nu) \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_1} + K_{b,2} (\alpha_2 - 1) (\alpha_2 + \nu) \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_2} + K_{b,3} (\alpha_3 - 1) (\alpha_3 + \nu) \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_3} \right] \frac{\varphi}{\left(\frac{r}{a}\right)^{2+n}} \quad (\text{kPa})$$

$$\sigma_{\theta,s} = -\frac{\pi E t_s}{360(1-\nu^2)a} \left[K_{b,1} (\alpha_1 - 1) (1 + \nu \alpha_1) \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_1} + K_{b,1} (\alpha_2 - 1) (1 + \nu \alpha_2) \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_2} + K_{b,3} (\alpha_3 - 1) (1 + \nu \alpha_3) \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_3} \right] \frac{\varphi}{\left(\frac{r}{a}\right)^{2+n}} \quad (\text{kPa})$$

(其得数的计算见参考资料[1])

(3) 传递扭矩所引起的剪应力

$$S = \left[\frac{T}{2\pi r^2 t_a} \right] \left(\frac{r}{a} \right)^n$$

T——传递的扭矩 (Kg-cm)

t_a——半径为 a 处的膜盘厚度 (cm)

膜盘型面为双曲线时, n=2, 引起的剪应力为常数。

(4) 离心力的计算公式:

根据资料[3]所提供的匀质圆盘其截面为曲线和直线时, 圆盘可假定分成几个有某种宽度的圆环, 各圆环可作为具有双曲线形截面, 如 r₁和 r₂分别为任意圆环内外半径, 则在圆环内外边界上的切向应力 σ_{t1}, σ_{t2}和相应的径向应力 σ_{r1}, σ_{r2}之间的关系为:

$$\sigma_{t1} = A r_2^2 - B \sigma_{r1} + C \sigma_{r2}$$

$$\sigma_{t2} = D r_2^2 - E \sigma_{r1} + F \sigma_{r2}$$

A, B, C, D, E, F为系数 (详见参考资料[3])。

根据具体的膜盘型面结构情况, 可将其分成许多圆环, 在每一圆环的边界上利用上述公式之间的关系, 而在边界上切向应力应该相等这一条件求得它们之间的关系:

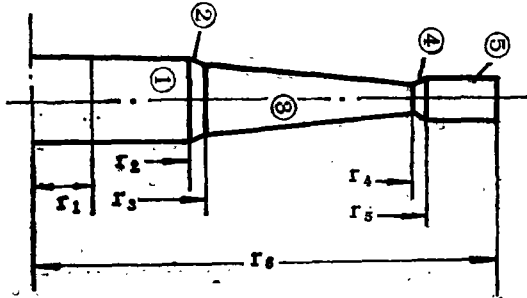


图 4 膜盘截面图

$$\sigma_{ti} = A_i r_{i+1}^2 - B_i \sigma_{ri} + C_i \sigma_{r_{i+1}}$$

$$\sigma_{t_{i+1}} = D_i r_{i+1}^2 - E_i \sigma_{ri} + F_i \sigma_{r_{i+1}}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5$$

根据具体情况

$$\sigma_{r1} = \sigma_{r6} = 0$$

对每一圆环分别应用上公式, 同时又利用在边界上切向应力应相等这一条件求得②③圆环 (即膜盘) 径向应力和切向应力的

公式, 具体推导过程从界。

$$\sigma_{r3} = \{ C_3 (F_1 + B_2) [(F_4 + B_5) (D_3 r_4^2 - A_4 r_5^2) - C_4 (A_5 r_5^2 - D_4 r_5^2)] - [C_4 E_4 - (F_4 + B_5) (F_3 + B_4)] [(F_1 + B_2) (D_2 r_3^2 - A_1 r_4^2) - E_2 (A_2 r_3^2 - D_1 r_2^2)] \} / \{ [C_4 E_4 - (F_4 + B_5) (F_3 + B_4)] [(F_1 + B_2) (F_2 + B_3) - E_2 C_2] + C_3 (F_1 + B_2) (F_4 + B_5) E_3 \}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{1}{F_1 + B_2} (A_2 r_3^2 - D_1 r_2^2 + C_2 \sigma_{r3})$$

$$\sigma_{t3} = D_2 r_3^2 - E_2 \sigma_{r2} + F_2 \sigma_{r3}$$

求得: σ_{r3}, σ_{t3}时当 r₃ ≤ r ≤ r₄ 时有

$$\sigma_r = \frac{1}{C} (\sigma_{t3} - A r^2 + B \sigma_{r3})$$

$$\sigma_t = D r^2 - E \sigma_{r3} + F \sigma_r$$

其中各系数详见参考资料[3]。

按以上公式求得的离心应力的单位为 (磅/吋), 然后再化成为 kPa

2、安全系数的计算

膜盘在上述变形情况下引起的工作应力应该和修正的 goodman 曲线相比较，在曲线以下时应为安全的。以此建立了安全系数的概念，同时也依此建立了最大应力最小的概念，具有比较安全的含义。

(1) 主应力的计算

上述角位移引起对称的交变应力为动应力。而扭矩、离心力和轴向位移引起的为静应力。分别求出动应力和静应力的合成应力，然后再分别计算动、静应力的主应力。

(2) 按第三强度理论计算工作应力

$$\text{当 } \sigma_{\max}\sigma_{\min} < 0 \text{ 工作应力 } \sigma = |\sigma_{\max}| + |\sigma_{\min}|$$

$$\text{当 } \sigma_{\max}\sigma_{\min} > 0 \text{ 工作应力 } \sigma = \max\{|\sigma_{\max}|, |\sigma_{\min}|\}$$

(3) 安全系数的计算

假定仅有对称循环交变应力作用时，要求工作应力 $\sigma \leq [\sigma]_{\text{动}}$ ，仅有静应力作用时要求工作应力 $\sigma_{\text{静}} \leq [\sigma]_{\text{静}}$ 。而在一般情况即在此种循环特性下，静、动应力的合成应力 P 与原点 O 的连线和修正的 goodman 曲线的交点为 M。当 \overline{OM} 与 \overline{op} 之比大于 1 时就是安全的。

为简化起见，假定修正的 goodman 曲线为一直线。如图 5 所示。

$$n = \frac{\overline{OM}}{\overline{op}} \geq 1$$

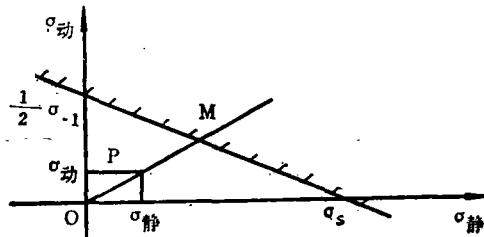


图 5 修正的 goodman 曲线

3、临界转速的计算

在优化设计时，希望设计出的结构之固有频率不与工作转速相重合，否则将引起共振。对挠性膜盘联轴器的临界转速计算如下。

(1) 轴向振动

它的轴向振动的模型为：

K_a ——为单膜盘的轴向刚度

$m_{e,q}$ ——为中间轴的等效质量

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_d}{m_{e,q}}} \quad (\text{周/次})$$

$$K_d = \frac{K_a + K_a}{2} = K_a$$

(2) 膜盘联轴器还可能发生平动振动

系统的弹性位能应该相等，据此可求得振动系统的刚度 K_d 和膜盘单个角偏移刚度之间的关系，则：

$$\frac{1}{2} K_d x^2 = 2 \times \frac{1}{2} K_b \theta^2$$

$$\therefore K_d = 2K_b \left(\frac{\theta}{x}\right)^2 = \frac{360K_b}{\pi l_c^2}$$

K_b ——单膜盘角偏移刚度 ($\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{rad}$)

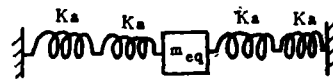


图 6 轴向振动模型

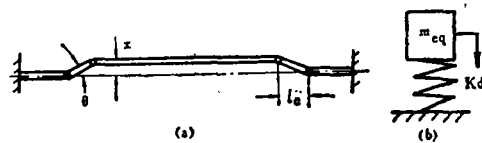


图 7 膜盘平动振动模型

$m_{e,q} = m$ ——中间轴的质量

$$\omega_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_d}{m_{e,q}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{360K_b}{\pi l_c^2 m}} \quad (S^{-1})$$

(3) 锥形振动

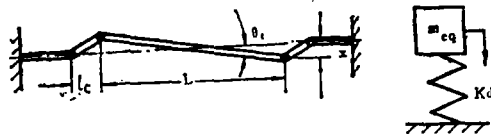


图8 锥形振动模型

从图8可以看到当 θ_1 很小时 $\text{tg}\theta_1 \approx \theta_1$ $\text{tg}\theta_1 = \frac{2x}{L}$

故 $\theta_1 = \frac{2x}{L}$

两个系统的动能应该相等，所以

$$\frac{1}{2} m_{e,q} x'^2 = \frac{1}{2} J_c \theta_1'^2$$

将 θ_1' 和 x 之间的关系代入即得：

$$m_{e,q} = \frac{4J_c}{L^2}$$

同样利用两系统的位能相等可得：

$$K_d = \frac{360K_b}{\pi l_c^2}$$

$$\therefore \omega_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_d}{m_{e,q}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{360K_b L^2}{\pi l_c^2 4J_c}} \quad (S^{-1})$$

K_a, K_b 的计算可参考资料[1]

J_c ——为中间轴绕垂直于中心线的轴的转动惯量。

(4) 弹性体振动一阶固有频率可用下式计算

$$W_4 = \pi^2 [EI / UL^4]^{\frac{1}{2}}$$

I ——为中间轴绕中心线的转动惯性矩 (cm^4)

$$I = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1}$$

R_2 ——中间轴内半径

R_1 ——中间轴外半径

U ——中间轴单位长度的质量 ($\frac{\text{kgs}^2}{\text{cm}^2}$)

L ——中间轴的长度

三、优化的数学模型及算例

取某一大功率高速具体设计的挠性膜盘联轴器作算例，其结构如图1所示。传递的最大功率 $N_{m,x} = 5148\text{kW}$ (7.000马力)。工作转速 $n = 6583\text{r/min}$ ，环境温度 $t = 250^\circ\text{C}$ ，中间轴的轴向位移 $\Delta = \pm 5\text{mm}$ ，角偏移为 $10'$ ，材料为40C₂NiM₂A，材料的

对称循环持久极限 $\sigma_t = 4807\text{MPa}$ (4920kgf/cm^2 , 弹性模量 $E = 205940\text{MPa}$ ($2 \cdot 1 \times 10^6 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$)) 剪切模量 $G = 79430\text{MPa}$ ($8.1 \times 10^5\text{kg/cm}^2$), 泊桑比 $\nu = 0.3$, 根据设计具体情况, 其他一些设计变量已确定。在此仅取膜盘的最小厚度 t_a , 还有膜盘的内外径之比 $R = \frac{b}{a}$ 为设计变量。

1、设计变量。

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_a \\ R \end{bmatrix}$$

2、目标函数

可选膜盘的重量最轻或者是在给定的外载荷情况下, 膜盘承受的最大应力达到最小, 这样具有最安全的含义。膜盘的具体结构型或为双曲线型面, 如图9所示。

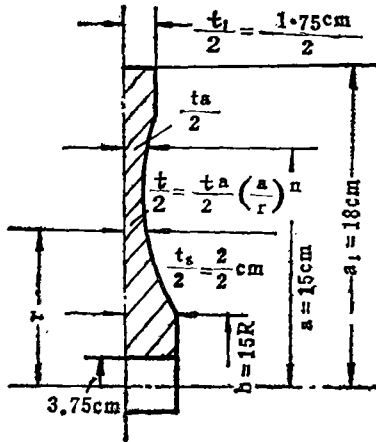


图9 膜盘结构图

现取重量最轻, 即体积最小作为优化目标。

$$\begin{aligned} V &= Z\pi \int_b^a t_a \left(\frac{a}{r}\right)^2 r dr + \pi (a_1^2 - a^2) t_1 + \pi (b^2 - c^2) t_2 \\ &= -2\pi t_a a^2 \ln R + \pi t_2 (b^2 - c^2) + \pi t_1 (a_1^2 - a^2) \\ &= -1413.717 X_1 \ln X_2 + 1413.717 X_2^2 + 455.924 \end{aligned}$$

3、约束函数

- (1) $0.08 \leq X_1 \leq 1$
- (2) $0.2 \leq X_2 \leq 0.8$
- (3) $n > 1$

(4) $\frac{\omega_1}{\omega} \leq 0.9$

(5) $\frac{\omega_2}{\omega} \leq 0.9$

(6) $\frac{\omega_3}{\omega} \leq 0.9$ 或 $\frac{\omega_3}{\omega} \geq 1.2$

(7) $\frac{\omega_4}{\omega} \geq 2$

根据以上情况列出约束函数:

$$g_1(x) = n - 1, \quad g_2(x) = x_1 - 0.08, \quad g_3(x) = 1 - x_1$$

$$g_4(x) = x_2 - 0.2, \quad g_5(x) = 0.8 - x_2, \quad g_6(x) = 0.9 - \frac{\omega_1}{\omega}$$

$$g_7(x) = 0.9 - \frac{\omega_2}{\omega}, \quad g_8(x) = 0.9 - \frac{\omega_3}{\omega} \text{ 或 } \frac{\omega_3}{\omega} - 1.2$$

$$g_9(x) = \frac{\omega_4}{\omega} - 2$$

因此优化的数学模型为:

$$\begin{cases} \min F(\bar{x}) \\ \bar{x} \in R^2 \\ \text{s.t. } q_i(\bar{x}) \geq 0 \quad i=1, 2, 3, \dots, 9 \end{cases}$$

4、优化方法

采用内点罚函数法将约束优化问题转化为无约束优化问题。

因为约束函数对设计变量的导数难以求得,故采用了不用求导数的无约束的优化方法。无约束的优化方法采用 Powell 方法,同时为加快其收敛速度,提供下次优化一个好的初始点,在程序中还加了外推技术。用二次插值法进行一维搜索,因为它的收敛速度是超线性的,故收敛速度比较快。而用 0.618 一维优化的方法寻找膜盘沿径向安全系数的最小点,(即最大应力点),它的收敛速度是线性的,但收敛比较稳定。

5、优化结果

$$\text{初始数据} \begin{cases} x_1 = 0.1 \text{ (cm)} \\ x_2 = 0.45 \end{cases}$$

$$\text{输出结果} \begin{cases} x_1 = 0.089786 \text{ (cm)} \\ x_2 = 0.241547 \end{cases}$$

$$F(\bar{x}) = 718.738770 \quad (\text{cm}^3)$$

$$\left| \frac{F(\bar{x}) - F(\bar{x}_0)}{F(\bar{x}_0)} \right| = 0.25748$$

重量减轻了25%,对设计膜盘有很大的指导意义。同时也可使最大应力达到最小,也取得了相类似结果。

参 考 文 献

- [1] 毕成武:膜盘联轴节设计 研究报告 1987年
- [2] Rothfull; N.B.Design and application of Flexible diaphragm Coupling to industrial-machine gas turbines ASME Paper 1972年
- [3] Roark, R.J. young W.C. & Formulas For stress and strain 1975年
- [4] 南京大学数学系计算专业编:最优化方法 科学出版社 1984年版
- [5] 陈立周等:机械优化方法 上海科技出版社 1982年版

The Design and Optimization of Flexible Diaphragm Coupling

Wang Xjnfeng

(Nanjing Aeronautical Engineering Institute)

Abstract

This paper gives an optimization design of flexible diaphragm couplings. The optimization aims at a coupling with a lightest possible weight, or with a large diaphragm structure but least working stresses under a given external loading.

Key words: coupling, optimization, design