

解透平机械流场的有限单元方法——等参单元法

叶子德 (哈尔滨船舶锅炉涡轮机研究所)

〔提要〕 本文介绍了求解涡轮机械流场的有限元法,在简化为轴对称流动的假设下,基于周向平均流面,应用流函数把涡轮机内的流动简化为二元准调和方程的描述,利用伽略金法求解各个基本方程,得到流场解。

关键词 涡轮机械 数值计算 流场计算

一、前言

透平机械内部流动是一种极其复杂的三元流动。本文是在周向平均流面的基础上,简化为轴对称流动问题,应用了流函数概念,把透平机械内部的流动用二元准调和方程来描写,并应用了弹性力学中解调和方程的一种数值方法——伽略金法(或称加权剩余法)。通过加权剩余法的应用,把调和方程离散成非线性方程组,将透平机械中通道内部划分成若干个单元体,进一步把非线性方程组化为非线性有限单元式进行求解。这种方法可很方便地计算到通道内部的流动。本文仅对周向平均流动问题进行探讨。

二、通流分析

1. 基本假设

- (1) 流体是无摩擦的,忽略了流体粘性的影响。
- (2) 静子、转子为刚体,转子相对于静子以等角速度 ω 绕机器旋转。
- (3) 流体是半理想气体

$$P = \rho RT$$

- (4) 整个机器系统与外界无热交换。
- (5) 流体相对于整个机器(系统)是稳定的。

2. 基本方程

- (1) 连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho W) = 0$$

在圆柱坐标系为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho W_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho W_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho W_z)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

其中 W 为气流的相对速度

r, u, z 分别表示在座标 r, φ, z 方向上的分量。

(2) 运动方程

$$W \times (\nabla \times C) = -\frac{\nabla \rho}{\rho} \quad (2)$$

(3) 能量方程

$$\frac{DI}{dt} = T \frac{DS}{dt} = Q \quad (3.a)$$

在绝热条件下为:

$$\frac{DI}{dt} = W_m \frac{\partial I}{\partial m} = 0 \quad (3.b)$$

(4) 气体状态方程

$$P = \rho RT. \quad (4)$$

借助于流面的概念, 将流动进行沿流面的周向平均, 也即把三元流动化为二元流动, 对上述方程进行求解。

流面定义为

$$s(r, z, \varphi) = 0$$

流面微分方程式为:

$$\frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial s}{\partial z} dz = 0$$

$$\nabla S \times n = 0$$

其中: ∇S 流面的梯度。 n 流面的单位法向矢量。

3. 沿流面周向平均的基本方程组。

在流面上

$$\varphi = \varphi(r, z)$$

用周向平均表达式改写基本方程 (1)、(2) 得:

连续方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\bar{\rho} W_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{\rho} W_z)}{\partial z} = -\frac{1}{n_u r} \left(n_r \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + n_u \frac{\partial W_u}{\partial \varphi} + n_z \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} \right) \quad (5)$$

运动方程式:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{W_u}{r} \frac{\partial(C_u \cdot r)}{\partial r} + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} + F_r \\ \frac{W_r}{r} \frac{\partial(C_u \cdot r)}{\partial r} + \frac{W_z}{r} \frac{\partial(C_u \cdot r)}{\partial r} &= F_u \\ -W_r \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) - \frac{W_u}{r} \frac{\partial(C_u \cdot r)}{\partial z} &= -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial s}{\partial z} + F_z \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中
$$F = - \frac{1}{n_u \cdot r} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} - T \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right) n = - \frac{1}{n_u r} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} n \quad (7)$$

能量方程式 (3.b) 周向平均, 得

$$W_r \frac{\partial I}{\partial r} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} = Q \quad (8)$$

对于绝热流动 $Q = 0$, 进一步可得

$$W_r \frac{\partial I}{\partial r} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} = W_m \frac{\partial I}{\partial m} = 0 \quad (9)$$

同理可得熵沿流线变化的周向平均表达式:

$$T \left(W_r \frac{\partial s}{\partial r} + W_z \frac{\partial s}{\partial z} \right) = T W_m \frac{\partial s}{\partial m} = 0$$

流函数定义为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \rho_r B W_z & W_z &= \frac{1}{\rho_r B} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\rho_r B W_r & W_r &= -\frac{1}{\rho_r B} \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

式中 B 为切向堵塞因子。

用流函数的微分式 (11), 得到透平机械内周向平均的通流方程。用相对速度表示为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_r B} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_r B} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{W_z} \left[-\frac{\partial I}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} + F_r + \frac{W_u}{r} \frac{\partial (C_u \cdot r)}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

用绝对速度表示为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_r B} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_r B} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{C_z} \left[-\frac{\partial H}{\partial r} + T \frac{\partial s}{\partial r} + F_r + \frac{C_u}{r} \frac{\partial (C_u \cdot r)}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

三、通流方程式离散化—应用“伽略金法”建立有限单元表达式

通流方程式 (13), 写成准调和方程的一般式:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + F = 0 \quad (14)$$

设其解为:

$$\psi(r, z) = \sum_r \psi_r N_r = [\psi_r] \{N_r\} \quad (15)$$

$r = 1, 2, \dots, n$

进行分部积分, 得:

$$\begin{aligned} & \iint \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] N_r dr dz \\ &= \iint \left(K \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial N_r}{\partial r} + K \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial N_r}{\partial z} \right) dr dz - \int (C_{z n_r} - C_{r n_z}) N_r ds = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

把准调和方程的假设解 (15) 代入式 (14) 和式 (16), 整理后得到:

$$\begin{aligned} & \iint K \left(\left[\frac{\partial N_r}{\partial r} \right] \left[\frac{\partial N_r}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial N_r}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial N_r}{\partial z} \right] \right) dr dz \{ \psi_r \} \\ &= \iint -F \cdot N_r dr dz \end{aligned} \quad (17)$$

并把它写成常用的有限元表达式:

$$[K] \{ \psi_r \} = [F] \quad (18)$$

四、有限单元表达式中各项的求解

取机器 (系统) 子午面坐标为 $r-z$, 并用八节点四边形等参单元分割子午面 (只包括转子和静子的通流截面)。图 1 示出了八节点四边形等参单元

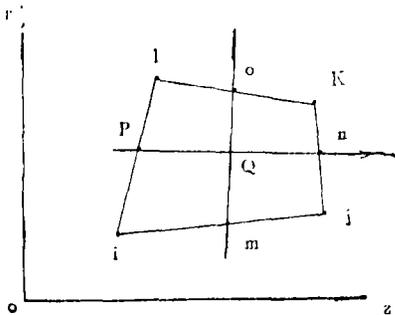


图 1 八节点的等参单元

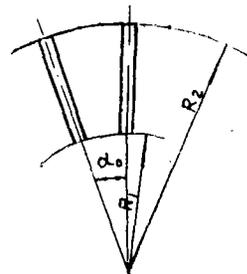


图 2 级的轴向投影

1. 刚度矩阵 $[K]$ 的求解:

$$[K] = \iint K \left[\frac{\partial N_r}{\partial r} \quad \frac{\partial N_r}{\partial z} \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial r} \\ \frac{\partial N_r}{\partial z} \end{Bmatrix} dr dz \quad (19)$$

$r = 1, 2, \dots, 8$

利用复合函数求导规则 and 用矩阵表达式，可以写出：

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_r}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial z} \\ \frac{\partial N_r}{\partial r} \end{Bmatrix} \tag{20}$$

[J] 为雅可比矩阵，它是单元整体座标对单元局部座标求导数的矩阵。通过 [J] 矩阵得到二种座标系求导的转换式。

$$[J] = [A] \begin{Bmatrix} z_1 & r_1 \\ z_2 & r_2 \\ \vdots & \vdots \\ z_8 & r_8 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

$$\text{其中：} [A] = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta) & \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta) & \frac{1}{4}(1+\eta)(\eta+2\xi) & \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(\xi+\eta) & \frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi) & \frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta+\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta-\xi) \\ (\eta-1)\xi & (1-\eta^2)/2 & -(1+\eta)\xi & (\eta^2-1)/2 \\ (\xi^2-1)/2 & -\eta(1+\xi) & (1-\xi^2)/2 & \eta(\xi-1) \end{Bmatrix}$$

最终得到刚度矩阵表达式：

$$[K] = \iint K \left([J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_r}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \right)^T [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_r}{\partial \eta} \end{Bmatrix} |J| d\xi d\eta \tag{22}$$

其中：|J| 雅可比矩阵的行列式

叶片切向堵塞因子 B：假设叶片厚度在轴线方向投影沿半径呈线性变化（图2），则有

$$B = \frac{z\alpha_0}{2\pi} = B_0 \quad \text{为常数}$$

其中：α₀ 弧度，是相邻二个叶片在轴线方向投影的夹角。

z 叶片数。R₁，R₂ 通道内外半径。

最终得到刚度矩阵 [K]：

$$[K] = K_0 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left([A] \begin{Bmatrix} z_1 & r_1 \\ z_2 & r_2 \\ \vdots & \vdots \\ z_8 & r_8 \end{Bmatrix} \right)^{-1} \left([A] \begin{Bmatrix} z_1 & r_1 \\ z_2 & r_2 \\ \vdots & \vdots \\ z_8 & r_8 \end{Bmatrix} \right)^{-1} [A] |J| d\xi d\eta \right\} \tag{23}$$

2. 负荷项 [F] 中各项求解：

$$\text{在绝对座标中，} [F] = \iint \frac{1}{C_r} \left[\frac{\partial H}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} - F_r - \frac{C_u}{r} \frac{\partial (C_u \cdot r)}{r\theta} \right] N_r dr dz$$

在相对坐标中, $[F] = \iint \frac{1}{W_z} \left[\frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} - F_r - \frac{C_u}{r} \frac{\partial(C_u \cdot r)}{\partial r} \right] N_r dr dz$

(1) 径向体积力 F_r :

$$F_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{r \partial \varphi} \operatorname{tg} \lambda$$

其中, λ 是叶片倾斜角。 $\frac{n_r}{n_t} = \operatorname{tg} \lambda$, 由于 λ 值通常很小, 所以径向体积力 F_r 可以忽略不计。

(2) $\frac{\partial I}{\partial r}$ (或 $\frac{\partial H}{\partial r}$), 滞止转 (焓或滞止焓) 的沿径分布。

一般给定了叶片各截面进出口的温度比 T_2^*/T_1^* , 能求得叶片各截面进出口处焓的沿径分布。若叶片进出口截面作为边界单元,

则能求得处在边界单元边界节点的 $\frac{\partial I}{\partial r}$ (或 $\frac{\partial H}{\partial r}$) 值, 而对于非边

界上的节点 $\frac{\partial I}{\partial r}$ (或 $\frac{\partial H}{\partial r}$) 值求取如下:

对动叶有 $\frac{\overline{DI}}{dm} \cdot W_m = 0$

对静叶有 $\frac{\overline{DH}}{dm} \cdot C_m = 0$

也就是说, 通过静叶 (动叶) 时, 滞止总焓 $H(I)$ 沿流线为常值。如果已知 n 点流函数值 $\psi_n(\xi_n, \eta_n)$, 则可得到 n_0 点的座标值 ξ_{n_0}, η_{n_0} (图 3)。

即 $\psi_n(\xi_n, \eta_n) = \sum N_r(\xi_{n_0}, \eta_{n_0}) \psi_r$

从而可求得 n_0 在单元局部坐标系中的座标值 (ξ_{n_0}, η_{n_0}) 。此处 $\xi_{n_0} = -1$ 。

$$\psi_n(\xi_n, \eta_n) = \frac{1}{2}(\eta_{n_0} - 1)\eta_{n_0}\psi_1 + \frac{1}{2}(1 + \eta_{n_0})\eta_{n_0}\psi_2 + (1 - \eta_{n_0}^2)\psi_3 \quad (24)$$

由式 (24) 可以求得 η_{n_0} 。对于单元中其他节点也可类推。现根据 n_0 座标值解出该点 I_{n_0} (或 H_{n_0}) 即

$$I_{n_0}(\xi_{n_0}, \eta_{n_0}) I_r = \sum N_r(\xi_{n_0}, \eta_{n_0}) \quad r = i, l, p$$

也就求得 n 节点 I_n (或 H_n 值), 即

动叶 $I_n = I_{n_0}$ 静叶 $H_n = H_{n_0}$

利用上述方法也可求得内部节点值, 进一步得到该节点 $\left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)_r$ 或 $\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)_r, r = i, j, \dots, p$

(3) $T \frac{\partial s}{\partial r}$ 项的求取

实际的流动过程中存在着粘性的影响, 沿流线焓值是增加的。对于静叶, 焓的增量 ΔS ,

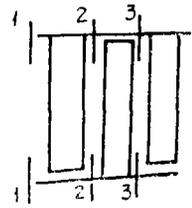


图 3 叶片通流图

$$\Delta S_s = -C_p \ln \left[\frac{(p_2^*/p_1^*)^{\frac{K-1}{K}}}{(T_2^*/T_1^* - 1) \frac{1}{\eta_s} - 1} \right] \quad (25)$$

动叶熵的增量 ΔS_s ,

$$\Delta S_r = -C_p \ln \left[\frac{(p_3^*/p_2^*)^{\frac{K-1}{K}}}{(T_3^*/T_1^* - 1) \frac{1}{\eta_r} - 1} \right] \quad (26)$$

其中 $\eta_r(r)$ 、 $\eta_s(r)$ 是动叶基元级效率沿径分布和静叶总压恢复系数沿径分布。

这样可以得到进出口截面处边界单元节点熵的沿径分布 $(\bar{\partial s} / \partial r)$ ，而对于非边界节点熵值计算是处在同一条流线上的熵值用线性插值得求。在已得到单元各节点熵值基础上，也能得到单元各节点的温度值 $T_{,0}$ 。那末单元各节点的 $(T \frac{\bar{\partial s}}{\partial r})_{,r}$ 值很容易解得了。

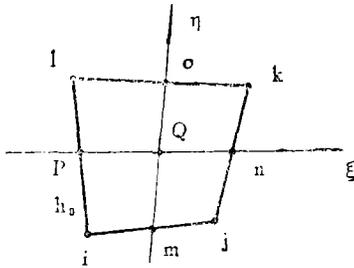


图 4 边界单元图

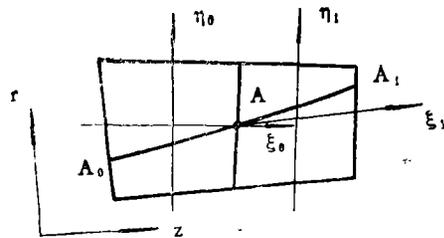


图 5 单元图

(4) $\frac{C_u}{r} \frac{\bar{\partial} C_u r}{\partial r}$ 沿径分布的计算: $(C_u r)$ 值对边界单元边界节点是给定的沿径函数，单元内部节点的 $(C_u r)$ 值与前述方法类同，由此可求得 $(\frac{C_u}{r} \frac{\bar{\partial} C_u r}{\partial r})_{,r}$ 的分布值。

(5) $\frac{1}{C_z}$ 值:

单元节点 $(C_z)_{,r} = (\frac{1}{\rho B_0 r} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r})_{,r}$ 中 C_z 、 ρ 均与流函数 ψ 有关。而单元节点的流函数本身

又是需要求解的未知函数。所以求解过程中必须根据一元流动计算的结果，假定单元节点流函数 $\psi_{,r}$ 值，然后求解负荷项中各项值和刚度矩阵 $[K]$ ，解得单元节点流函数 $\{\psi_{,r}\}$ 。籍此作为第二近似，由 $\{\psi_{,r}\}$ 再进行叠代解，直到精确预定要求的解。

(6) 负荷项中各项的最后求解式:

$$\left(\frac{1}{C_z} \frac{\partial H}{\partial r}\right) = [N_r] \left\{ \frac{1}{C_z} \frac{\partial H}{\partial r} \right\}_r, \quad r = 1, 2, \dots, 8 \quad (27)$$

$$\left[\frac{1}{C_z} \left(T \frac{\partial s}{\partial r} \right) \right] = [N_r] \left\{ \frac{1}{C_z} \left(T \frac{\partial s}{\partial r} \right) \right\}_r, \quad r = 1, 2, \dots, 8 \quad (28)$$

$$\left[\frac{C_u}{r \cdot C_z} \left(\frac{\partial C_u \cdot r}{\partial r} \right) \right] = [N_r] \left\{ \frac{C_u}{r \cdot C_z} \left(\frac{\partial C_u \cdot r}{\partial r} \right) \right\}_r, \quad r = 1, 2, \dots, 8 \quad (29)$$

最后代入负荷项〔F〕

$$\begin{aligned} [F] = & \iiint \left([N_r] [N_r] \left\{ \frac{1}{C_z} \frac{\partial H}{\partial r} \right\}_r + [N_r] [N_r] \left\{ \frac{C_u}{r C_z} \left(\frac{\partial C_u \cdot r}{\partial r} \right) \right\}_r + \right. \\ & \left. + [N_r] [N_r] \left\{ \frac{1}{C_z} \left(T \frac{\partial s}{\partial r} \right) \right\}_r \right) dr dz \quad r = 1, 2, \dots, 8 \quad (30) \end{aligned}$$

结 束 语

有限单元法是六十年代发展起来的一种数值计算方法, 已经很成功地应用于各个力学部门——固体力学、流体力学、电磁力学、声学等。国内也已较成功地用于计算各种应力场温度场和振动分析等问题。但是在透平机械中应用还仅是一种尝试。本文主要目的是介绍一种求解给定点的流函数方法。流函数的求得, 其他气动参数、几何参数也就迎刃而解了。而对于叶片气动性能计算、叶片结构参数的确定以及进一步考虑到壁面边界层的影响不是本文的目的。

参 考 文 献

- [1] 吴仲华: 轴流、径流和混流式亚音速与超音速叶轮机械中三维流动的普遍理论 上海内燃机研究所增压器技术组译。
- [2] 马什 H: 利用矩阵通流方法计算任意透平机械中流体流动的数值计算 透平机械长叶片中的三元流动 译文集“舰船透平锅炉”编辑室 1974.2
- [3] 诺瓦克 R·A: 求解流体流动问题的流线曲率计算方法, 透平机械长叶片中的三元流动 译文集“舰船透平锅炉”编辑室 1974.2
- [4] Zienkiewicz o. c; Cheng Y. K.: Finite Elements in the solution of filed problems. *The Engineers* 1965
- [5] Kenneth H. Huebner: *The Finite Element method for Engineer* John Wiley & Sons 1974

Equal Parameter Element Method—a Finite Element Method for the Solution of Turbomachinery Flow Field Problems

Ye Zide

(Harbin Marine Boiler and Turbine Research Institute)

Abstract

This paper presents a finite element method for solving turbomachinery flow field problems. Under the assumption of simplification to an axisymmetric flow and on the basis of a peripheral average stream surface, the flow field in a turbomachine can be represented through simplification by using a slow function to a two-dimensional quasi-harmonic equation. By use of Galerkin method, various basic equations can be solved to obtain the flow field solution.

Key words: turbomachinery, numerical value calculation, flow field calculation.

On the Natural Circulation of Subcritical Pressure Boilers

Wang Jinzhen, Lin Zhifei, Huang Xuhui

(Harbin Boiler Works)

Abstract

The paper presents the main calculation results of a 3000MW natural circulation boiler by use of special source programs. Data obtained from calculations of various diameters of downcomers and water wall tubes, thermal loads of water wall tubes as well as the operating conditions under 203MPa drum pressure are discussed. A few meaningful conclusions were drawn.

Key words: boilers, hydrodynamics, subcritical flow, natural circulation