用当量叶栅求解亚音速可压缩平面叶栅流场的边界元法

林成先　廖艾贤　（西南交通大学）

〔提要〕本文把物理平面内的亚音速可压缩流平面叶栅变换为计算平面内的不可压缩流当量叶栅，再用边界元法进行计算，得到了良好的结果。

主题词　可压缩流场　叶栅　边界元法

一、前　言

目前，用边界元法研究叶栅流场已取得某些可喜的进展，但已发表的工作仍限于平面叶栅的不可压缩位势流动的范围[1][2]。因平面叶栅问题的全速度势方程还未找到基本解，当前用边界元法对它进行求解的条件尚不具备。本文作者用边界元法在线化小扰动范围内对平面叶栅亚音速可压缩位势流动进行了研究[3]。所用方法有三种：

1. 用边界元法计算平面叶栅不可压缩位势流动，再用Prandtl—Glauert压缩性修正法进行修正。

2. 将处理正交异性域位势问题的边界元法移用于平面叶栅亚音速可压缩位势流动（简称正交异性法）。

3. 把物理平面内的亚音速可压缩流平面叶栅变换为计算平面内的不可压缩流当量平面叶栅，再用边界元法进行计算（简称当量叶栅法）。

本文介绍当量叶栅法。正交异性法在另一篇论文中报导。

二、当量叶栅的控制方程与边界条件

在小扰动流动、轻负荷叶栅的前提下，无粘、等熵、无旋可压缩平面叶栅流场的控制方程为如下形式的线化小扰动速度势方程：

$$E^2 \cdot \partial^2\hat{\varphi}/\partial x^2 + \partial^2 \hat{\varphi}/\partial y^2 = 0 \qquad (1)$$

式中，$E^2 = 1 - M^2_\infty$，M_∞为特征马赫数。$\hat{\varphi}$为由下式定义的扰动速度势：

$$\varphi = V_\infty x + \hat{\varphi} \qquad (2)$$

式中，V_∞为特征速度，φ为速度势。

进行如下变换：

收稿日期：1988—06—21

$$\left.\begin{aligned}&\xi=x\\&\eta=Ey\\&\varphi_p(\xi,\eta)=E\hat{\varphi}(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

可把物理平面（x,y）中实际平面叶栅的亚音速可压缩流场变换为计算平面（ξ,η）中当量平面叶栅的不可压缩流场：

$$\partial^2\varphi_p/\partial\xi^2+\partial^2\varphi_p/\partial\eta^2=0\tag{4}$$

而上式可由边界元法方便地进行求解。

应用上述变换方法研究平面叶栅流场的主要困难之一，在于变换因子E中特征马赫数M_∞的选择。对于孤立叶型，描述可压缩性影响的马赫数是叶型上、下游无穷远处的马赫数。但这个条件对叶栅不适用，因为叶栅上、下游无穷远处的马赫数不相同。一般的处理方法是，取进口马赫数M_1、出口马赫数M_2或者两者的算术平均值作为第一近似。本文取$M_\infty=M_1$。与此相应，$V_\infty=V_1$（进口流速）。

当用边界元法对计算平面内当量平面叶栅的不可压缩流场进行数值计算时，问题的边界条件也必须用计算平面内边界上的φ_p或φ_p的外法向导数$q_p=\partial\varphi_p/\partial b$给出。计算区域取成图1的形式。引入连续性方程、G.G.Stokes定理及近似流动相切条件，经过推导、整理，可得到如下的边界条件：

a. 远上游进口边界

$$q_p=EV_1(1-\cos\beta_1)\tag{5a}$$

b. 远下游出口边界

$$q_p=E(V_1\rho_1\cos\beta_1/\rho_2-V_1)\tag{5b}$$

c. 栅前周期性边界

$$\left.\begin{aligned}&q_p|w_1'=-q_p|w_1\\&\varphi_p|w_1'=\varphi_p|w_1+EV_1t\sin\beta_1\end{aligned}\right\}\tag{5c}$$

d. 栅后周期性边界

$$\left.\begin{aligned}&q_p|w_2'=-q_p|w_2\\&\varphi_p|w_2'=\varphi_p|w_2+EV_1t\cos\beta_1\mathrm{tg}\beta_2\cdot\rho_1/\rho_2\end{aligned}\right\}\tag{5d}$$

e. 叶型表面边界

$$\left.\begin{aligned}&q_p=\frac{\partial\varphi_p}{\partial\xi}\cos(\xi,b)+V_1[dt(x)/dx]\sin(\xi,b)\\&\frac{\partial\varphi_p}{\partial\xi}=-EV_1\{1+[df(x)/dx]\mathrm{tg}(n,x)\}\end{aligned}\right\}\tag{5e}$$

其中，b为计算平面中域边界的外法向，n为物理平面中域边界的外法向。$y=f(x)$为物理平面中叶型表面曲线。ρ为气流密度，β为气流角，W与W'为周期性对应点。下标“1”表示栅前，“2”表示栅后。

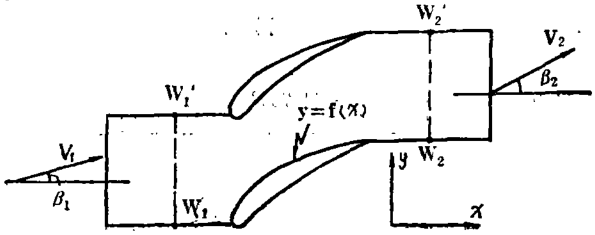

图1　计算区域

三、边 界 元 算 法

据位势问题的边界元法，由（4）式可得如下边界积分方程[4]：

$$C_i\varphi_p^i+\int_\Gamma \varphi_p q_p^* d\Gamma=\int_\Gamma q_p\varphi_p^* d\Gamma \tag{6}$$

式中，Γ表示计算平面内计算域的边界，C_i为常数。φ_p^*为方程（4）的基本解，

$q_p^*=\partial\varphi_p^*/\partial b$。

用常数元对（6）式进行离散，$\Gamma=\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j$，$C_i=\frac{1}{2}$，得以下线性代数方程组：

$$H\Phi=GQ \tag{7}$$

式中，$\Phi=(\varphi_{p1},\varphi_{p2},\cdots,\varphi_{pN})^T$，$Q=(q_{p1},q_{p2},\cdots,q_{pN})^T$，

$$G_{ij}=\int_{\Gamma_j}\varphi_p^* d\Gamma$$

$$H_{ij}=\begin{cases}\int_{\Gamma_i} q_p^* d\Gamma, & i\neq j\\ \int_{\Gamma_i} q_p^* d\Gamma+\frac{1}{2}, & i=j\end{cases}$$

在周期性边界上，虽然有关系式（5c）、（5d），但每对周期性对应点处的φ_p或q_q并未给出。因此，方程组（6）式应与各周期性对应点处的关系式（5c）、（5d）联立求解。为保证解的唯一性，还需要给定边界上某节点处的速度势的数值。在引入边界条件后，由(7)式可得如下形式的线性代数方程组：

$$AX=F \tag{8}$$

式中，A为系数矩阵，X为未知列向量，F为已知列向量。式（8）可用高斯消元法求解，从而得出计算平面中边界上全部的φ_p与q_p，进而得到物理平面中边界上的速度势φ、叶型表面的切向流速V_s和压力系数S_p。

图2为计算机程序框图。其中，在用边界元法（缩记为BEM）解当量叶栅中的不可压缩流场时，首先在物理平面中由计算机自动划分边界单元[3]。库塔条件采用广义$K—J$条件。

表1为$A_3K_7(\theta=80°)$透平叶型[5]用不同方法得出的出口气流角β_2的对照。图3为K—7压气机叶型[3]用不同方法得到的叶型表面压力系数的对比。可见，几种不同方法得出的结果是非常相近的。

表 1

项目 \ 来源	实验[5]	当量叶栅法	正交异性法[3]
β_2	-41.0°	-41.729°	-40.960°

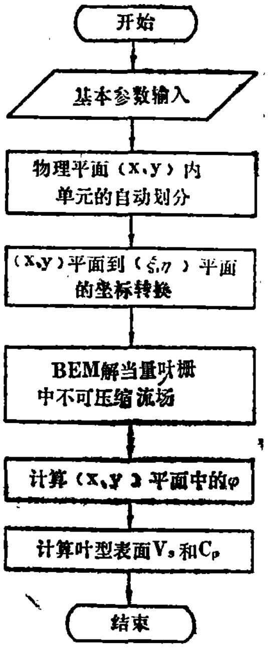

图 2　程序框图

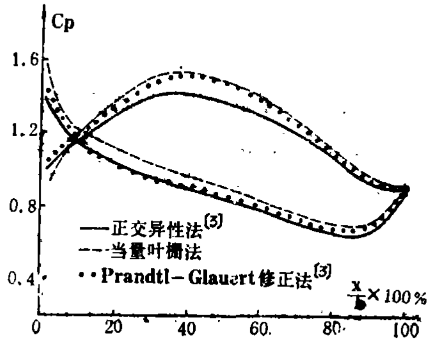

图 3　叶型表面压力系数对比

四、结　束　语

1. 本文使用当量叶栅用边界元法求解亚音速平面叶栅线化小扰动速度势控制方程的成功，使边界元法在叶轮机械气动力学中的应用研究进入到了可压缩流的领域。

2. 用本文提出的当量叶栅边界元法来处理亚音速可压缩平面叶栅流场，具有数学原理简单、程序易于处理、存贮量要求低、计算速度快等许多优点。

参　考　文　献

〔1〕依风鸣，秦仁，姚强：叶栅绕流的边界元法，工程热物理学报，8(3)1987。

〔2〕惠兆森：叶栅流场计算的新方法，热能动力工程，2（3）1987

〔3〕林成先：平面叶栅流场的边界元法分析与实验研究，西南交通大硕士学位论文(1988)。

〔4〕Brebbia C.A.,Telles J.C.F, Wrobel L.C:Boundary Element Techniques—Theory and Applications in Engineering,Springer-Verlag 1984

〔5〕James C.Dunavant and John R.Erwin:Investigation of a Related Series of Turbine-blade Profiles in Cascade,NACA TN 3802,1953。

Abstract

In this paper a plane cascade in subsonic compressible flow is transformed into an equivalent cascade in incompressible flow and then the boundary element method is used to solve this flow field with satisfactory results being obtained.

Key words: compressible flow field, cascades, boundary element method.

Abstract

This paper describes the design of a waste heat boiler control system and the application of a single-loop regulator in the said system. Such a regulator can serve as an ideal control device for the boiler complicated control system.

Key words: waste heat boiler, control system, regulators.

Edited and Published by Editorial Staff of"Journal of Engineering for Thermal Energy and Power

Printer: Printing House of Harbin Institute of Technology

Address: P.O.Box 77-7, Hardin, China

Cable: 6511, Harbin, China

Post Code Number 150036

Periodical Registration: CN23-1176

Distributed by China Internarional Book Trading Corporation, P.O.Box 2820, Beijing, China