

涡轮机叶片扭转振动的有限差分法

孙柏涛 (国家地震局工程力学研究所)

〔提要〕 本文提供了计算无冠涡轮机叶片扭转振动的近似方法。该方法具有数据处理简便、计算时所占计算机内存少、基本保证工程计算精度等优点,并且就该方法的可行性进行了系统的说明和实验对比。

主题词 涡轮机 叶片振动 计算方法

一 前 言

涡轮机叶片振动频率的计算为科技人员所关注。目前,经常采用的有限单元法是一种有力的计算手段。它可以同时有效地解决弯曲、扭转耦联振动的计算问题,而且边界及其它条件的简化也令人满意。然而,有限单元法繁冗的数据处理往往赶不上设计工作的急需,为此,本文提供了常用涡轮机动叶无冠叶片扭转振动的有限差分计算方法。它的原理是按一定条件把压气机叶片简化成具有连续或分段连续解析表达式的变截面柱体。然后推导出该变截面柱体的扭转振动方程。计算机自动划分有限差分格式求得该方程的特征值,从而得出变截面柱体的自由扭转振动频率。它较之有限单元方法具有数据处理简便,计算时占用计算机内存少,随机性强等优点。计算精度基本满足工程上的要求。

二 变截面圆柱体自由扭转振动方程

首先推导变截面圆柱体自由扭转时的振动频率。涡轮机叶片与其相似性将在本文的下节说明。

对于等截面柱体,根据弹性力学的扭转

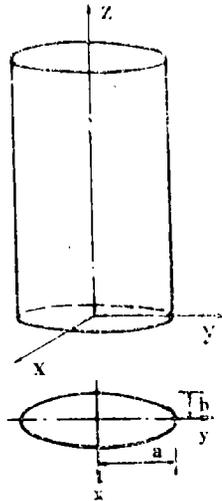


图 1

微分方程

$$\nabla^2 \varphi = -2GK \quad (1)$$

其中: φ 扭转应力函数, G 剪切弹性模量, K 单位长扭角

等截面圆柱体自由扭转时的弹性力学解为:

$$K = \frac{4\pi^2 I_\rho}{GA^4} \cdot M \quad (2)$$

其中 M 扭矩 $I_\rho = \frac{1}{4} ab\pi(a^2 + b^2)$,

$A = ab\pi$

由表达式(2)可知,自由扭转振动时任意微段的扭角有关系式

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} dz = \frac{4\pi^2 I \rho}{GA^4} M dz \quad (3)$$

其中: $f(z) = \left(\frac{GA^4}{4\pi^2 I \rho} \right) / \rho I \rho$

则有

$$M = \frac{GA^4}{4\pi^2 I \rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3')$$

将 (3') 式的两边同时求偏导

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial z} dz &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{GA^4}{4\pi^2 I \rho} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} dz \\ &+ \frac{GA^4}{4\pi^2 I \rho} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz \end{aligned} \quad (4)$$

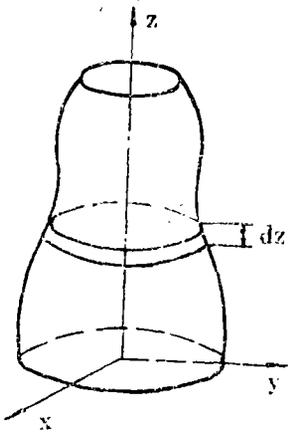


图 2

从柱体沿z轴方向取出一微块, 如图3。
建立微块的运动方程。

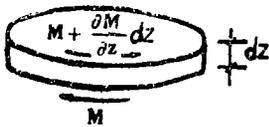


图 3

$$\begin{aligned} \rho I \rho dz \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= \frac{\partial M}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial z} \\ &\left(\frac{GA^4}{4\pi^2 I \rho} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} dz + \left(\frac{GA^4}{4\pi^2 I \rho} \right) \\ &\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz \end{aligned} \quad (5)$$

整理 (5) 式可以得

$$f(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + g(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{GA^4}{4\pi^2 I \rho} \right) / \rho I \rho$$

方程 (6) 是二阶变系数偏微分方程。
用分离变量法

设 $\theta(z, t) = Z(z)T(t)$ 代入方程 (6)

$$\begin{aligned} f(z)T(t)Z''(z) + g(z)T(t)z'(z) \\ = \ddot{\pi}(t)Z(z) \end{aligned}$$

其中“ $\ddot{\pi}$ ”表示对变量 t 的求导, “ \dots ”表示对变量 t 的求导

变换上式。使两边同时除以 $T(t)Z(z)$

可得:

$$\frac{f(z)Z''(z) + g(z)Z'(z)}{Z(z)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \quad (7)$$

方程 (7) 的左端与变量 t 无关。右端与变量 z 无关。所以两端只能同时等于一常数且又知是一个振动方程。设常数为 $-\lambda$ 。

方程变成

$$\begin{cases} \ddot{T}(t) + \lambda T(t) = 0 \\ f(z)Z''(z) + g(z)Z'(z) + \lambda Z(z) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中 $Z(0) = 0, Z'(L) = 0$

在方程 (8) 中 $f(z), g(z)$ 均为已知函数, λ 为任意常数。这种形式的方程在数学中叫边界问题。取出 (8) - (1) 式:

$$\ddot{T}(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (8')$$

令 $\ddot{T}(t) = ce^{\omega t}$ 代入方程 (8'),

$$c\omega^2 e^{\omega t} + \lambda ce^{\omega t} = 0, \omega = i\sqrt{\lambda}$$

由上式可知 λ 和系统振动频率的关系。

将 (8) - (2) 式取出:

$$\begin{cases} f(z)Z''(z) + g(z)Z'(z) + \lambda Z(z) = 0 \\ Z(0) = 0 \\ Z'(L) = 0 \end{cases} \quad (8'')$$

方程(8'')属于二阶变系数方程,因为没有通解式,所以采用差分解法(用线性差分格式)。

$$\left. \begin{aligned} Z_i' &= (Z_{i+1} - Z_i)/h \\ Z_i'' &= (Z_{i+1} + Z_{i-1} - 2Z_i)/h^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

h为步长。将(9)式代入方程(8'')。并整理可得

$$\left[\frac{f(z_i)}{h^2} + \frac{g(z_i)}{h} \right] Z_{i+1} + \left[-2\frac{f(z_i)}{h^2} - \frac{g(z_i)}{h} + \lambda \right] Z_i + \left[\frac{f(z_i)}{h^2} \right] Z_{i-1} = 0 \quad (10)$$

当(10)式分别取*i*=1, 2, ...*n*时, 并利用

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= 0 \\ Z_n &= Z_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

可组成线性方程组:

$$[D]\{Z\} = \{0\} \quad (11)$$

由方程所表示的物理现象可知{Z}不可能为{0}, 则必有

$$\text{Det}[D] = 0 \quad (13)$$

因而, 可通过使(13)式成立的条件, 求得一系列λ值。

三 变截面椭圆柱体

模拟涡轮机叶片的可行性探讨

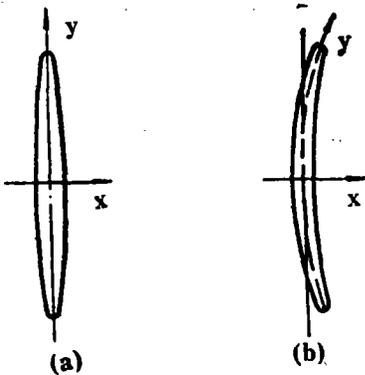


图 4

当椭圆的长轴*a*≫*b* (*b*为椭圆的短轴)

如图4, 它类似于薄壁结构, 当具有图4(a), (b)断面的柱体受有同样扭矩时, 根据弹性理论证明, 它们分别的应力分布和扭角是基本相等的。

由弹性力学的薄膜比拟法可知

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 Z &= -q/T \\ \nabla^2 \varphi &= -2GK \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

上述第一方程属于薄膜垂度与均布力的微分关系。其中*z*为薄膜垂度, *q*为均布力, *T*为薄膜张力。而第二方程是等截面柱体受纯扭时扭转应力函数应服从的微分关系, 其中φ为扭转应力函数, *G* 剪切弹性模量, *K* 为单位长扭角。虽然它们表述的物理现象不同。但是具有很相似的数学关系式。所以普朗都首先提出把薄膜垂度可以比拟做扭转应力函数。诸如其它物理量可以相关比照。

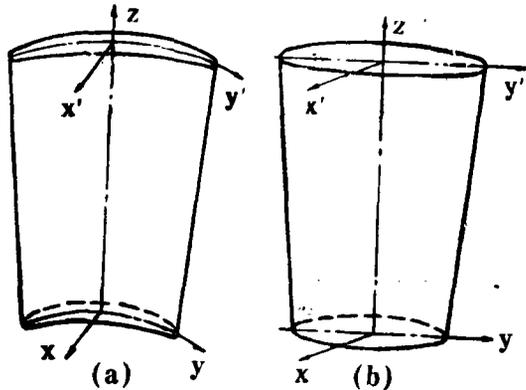


图 5

综上所述。如图5 (a) 这种镰刀形叶片, 可以简化成厚度相等。弦长与椭圆长轴相等的如图5 (b) 这种变截面椭圆。图5 (a) 属于微弯形状则与图5 (b) 相比其物理量在受静态纯扭情况下基本没有差别。然而在扭转振动时转动惯量会有小差别, 届时引进系数对此进行修正。

在用有限元计算叶片振动时, 把叶片的根部看成是作用在*EI*无限大的刚体上。一般的讲, 这比实际结构增加了刚性、又有限元法是能量法、因而计算值往往和实物实验结

果漂移较大。然而上述推导过程是采用二端自由。由于叶片基本上可以看成是薄壳，在扭转时产生翘曲是很小的。所以对长，薄叶片，微振动时和实际结构吻合较好。

四 计算实例

利用本文提供的方法，对某机型压气机前三级叶片进行了核算。

将叶片的叶型参数分别输入计算机使其自动插值形成分段连续的变截面柱体。表1是

表 1

方法 \ 级号	第一级	第二级	第三级
共振法	1102	1152	1739
模态法	1100	1150	1709
有限元法	1168	1159	1828
有限差分法	1040	1074	1564
有限差分法和实验值相差的百分比	5.6%	6.7%	9.2%

(上接第16页)

六 结 论

对计算结果的分析表明，当透平机械端壁存在边界层分离时，考虑了边界层因素后的 S 流面势流解在端壁附近更接近真实的解，并且与未修正的 S_2 流面势流解在端壁附近有较大的差异。当存在分离气泡时，以排挤厚度 δ^* 修正 S_2 流面势流解比较合理；在无分离气泡时，用流量系数 ξ_c 和排挤厚度 δ^* 修正 S_2 流面势流解都比较合适。本文所述方法适用于由凸台、凹槽、后台阶、端壁扩张角较大及根部反动度为负等因素引起的带有分离气泡的湍流边界层计算。

参 考 文 献

- [1] Veldman A.E.P., *AIAA Paper* 81-4010
- [2] Stewatson K., *Advances in Appl. Mech.*, 1974. (14)
- [3] 康顺, 王仲奇, *ASME Paper* 87-GT-133
- [4] 康顺, 刘凤君, 王仲奇, 《中国工程热物理学会论文》·No.872052
- [5] Green J.E., Weeks, L.J., and Brookman, J.W.F., *A.R.C.R. & M.* 3791(1973).
- [6] Carter J.K., *NASA TR-R-447*, 1975.
- [7] Chen Z.L., and Wu, J.M., *AIAA Paper* 84-0267.

对叶片基频的实验值和计算值的比照。

由于有限差分格式中步长的限制，一般情况下，该方法计算低频精度较高。当然在计算高频时亦可采用移位迭代法提高其精度。

从基频的比较看前二级的精度比第三级高。其原因有两个 (1) 前二级叶片是镰刀型叶片和椭圆断面形状比较相近，而第三级叶片是流线型与椭圆断面相差较远。(2) 前二级叶片叶身较长。

本文曾得到李斐，刘玉洁同志的大力协助，在此深表谢意。

参 考 文 献

- [1] 徐芝纶, 弹性力学(上册) 人民教育出版社 1979
- [2] 李庆扬等, 数值分析 华中工学院出版社 1982
- [3] 战同胜, 数值计算方法 大连工学院 1986
- [4] 汤姆逊, W.T. *Theory of Vibration With Applications*, Prentice-Hall, INC Englewood Cliffs, New Jarsey 07632

(渠源沥编辑)

JOURNAL OF ENGINEERING FOR THERMAL ENERGY AND POWER

No.3, 1989

CONTENT

1. **The structural design of a marine gas turbine LP compressor**.....
.....Li Fei, Ju Shili, Zhao Yousheng
.....Sheg Huiyu, Yuan Zengshou (1)

Abstract

As a companion piece to a previous paper by the same authors (Reference [1]), this article sets forth the structural design features of a new LP compressor of a marine gas turbine. Its development success, component tests and the tests of the compressor as a whole have shown that the compressor has met the requirements of the second generation marine engines in respect of reliability, long life, maintainability and adjustability.

Key Words: marine gas turbine, axial compressor, structural design

2. **The finite difference method for calculating the tensional vibration of turbine blades**..... Sun Baitao (8)

Abstract

This paper presents an approximate method for calculating the tensional vibration of unshrouded turbine blades. This method has the following merits: simplified data processing, low requirements in internal storage, satisfactory accuracy in engineering calculations, etc. With regard to the feasibility of the method, some systematic explanation and calculation examples are given.

Key Words: turbine, blade vibration, calculation method

3. **Calculation of turbine end wall turbulence separation and re-attachment of the boundary layer**.....Kang Shun, Liu Fengjun (12)

Abstract

On the basis of Veldman model of interaction between a boundary layer and potential flow, this paper describes a method for calculating end wall boundary layers with turbulence separation bubbles. The recommended method is suitable for calculating boundary layers with turbulence separation bubbles caused by such factors as bosses, grooves, rear shoulders, relatively large wall surface expansion angles or negative root reaction. It features short calculation time, significant economy in computer internal storage, etc.

Key Words: turbine cascade, flow path, boundary layer, calculation method