

$\eta^\lambda P$ 最大时不可逆卡诺热机的 η 和 P

严子浚 (厦门大学)

〔提要〕 本文在内可逆卡诺热机模型的基础上,引入不可逆程度 I 来描述传热以外的其它不可逆性,从而建立了不可逆卡诺热机模型。并以 $\eta^\lambda P$ 作为目标函数讨论热机的最优化。导出了最大时不可逆卡诺热机的效率和功率,并对 $\lambda=0$, $\lambda=1$ 和 $\lambda \rightarrow \infty$ 三种情况作了较详细的讨论。

关键词 现代热力学 卡诺热机 不可逆性 最佳设计

一、引言

自1975年提出有限时间热力学以来,有不少学者都以内可逆卡诺热机模型研究了工质与热源之间的传热不可逆性对热机优化性能的影响^[1-12],取得许多重要结论。例如, Curzon和Ahlborn最先导出最大功率输出时内可逆卡诺热机的效率(即著名的CA效率)为^[1]

$$\eta_m = 1 - \sqrt{T_L/T_H} \quad (1)$$

而最大输出功率为

$$P_{max} = \frac{\alpha\beta}{r(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} T_H \eta_m^2 \quad (2)$$

文献^[2]又证明了内可逆卡诺循环是工作在两个热源间的最优循环方式,笔者又进一步导出内可逆卡诺热机的最大输出功率 P 与效率 η 间的关系为^[6]

$$P = \frac{\alpha\beta}{r(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} \eta \left(T_H - \frac{T_L}{1-\eta} \right) \quad (3)$$

等等。式(1) — (3)中的 T_H 和 T_L 分别为高低温热源的温度, α 和 β 分别为工质与高低温热源间的热传导系数,而 r 为循环周期 τ 与两个等温过程的总时间 $t_1 + t_2$ 之比。

显然,实际热机除了传热不可逆性外,还存在其它不可逆效应。为了使有限时间热力学理论能更好地应用于实际,除了研究传热不可逆性外,有必要进一步研究其它不可逆效应。本文将在内可逆卡诺热机模型的基础上,引进不可逆程度 I 来描述传热以外的其它不可逆性,从而建立了不可逆卡诺热机模型。并采用加权的两参数(效率 η 和功率 P)联合的目标函数^[13] $\eta^\lambda P$ 来讨论不可逆卡诺热机的优化性能。其中 λ 为权重参数,取值可从 $0 \rightarrow \infty$ 。实际应用时,可根据对热机效率和功率的不同要求来选择适当的 λ 值。例如,要求效率和功率同时并重时,取 $\lambda=1$;要求以功率作为目标函数时,取 $\lambda=0$;等等。可见,以 $\eta^\lambda P$ 作为目标函数来讨论热机的优化问题,具有很普遍的意义,包括了通常文献中以功率 P 作为目标函数进行讨论。此外,采用 $\eta^\lambda P$ 作为目标函数的优越性还在于它可根据实际需要按不同的权重(即不同的 λ 值)来兼顾热机的效率和功率。所以采用这种目标函数既有普遍性,又有重要实际意义。

二、不可逆卡诺热机模型

上已指出，本文所采用的不可逆卡诺热机模型是在内可逆卡诺热机模型的基础上建立起来的。它满足以下三个条件：

1. 在这样的热机中，工质的循环是由两个等温和两个绝热过程所组成，而这四个过程一般说来是不可逆的。

2. 工质与热源之间存在热阻，传热是在有限的温差下进行。因而工质在两个等温过程中的温度 T_1 和 T_2 不同于热源的温度 T_H 和 T_L ，而有 $T_H > T_1 > T_2 > T_L$ 。

3. 除了工质与热源之间传热的不可逆性外，循环中还存在其它不可逆效应。并为了简便，将这些不可逆效应的总效果归结为使低温热源每循环的熵增量比仅有传热不可逆性时的增大。这样，在每循环从高温热源吸取的热量 Q_1 固定的情况下，若以 ΔS_2 和 $\Delta S_2'$ 分别表示不可逆和内可逆卡诺热机中低温热源每循环的熵增量，则可引进不可逆程度

$$I \equiv \Delta S_2 / \Delta S_2' = Q_2 / Q_2' \geq 1 \quad (4)$$

来度量除了传热以外的其它不可逆性。其中 Q_2 和 Q_2' 分别为不可逆和内可逆卡诺热机每循环放给低温热源的热量。显然，当 $I=1$ 时，只有传热的不可逆性，而没有其它不可逆效应，不可逆卡诺热机就转化为内可逆卡诺热机。可见，本文的结果将包括内可逆卡诺热机有关的结论。但在一般情况下， $I > 1$ ，所以本文的结论不仅比可逆卡诺热机的结论更为有用，而且也比内可逆卡诺热机的结论对实际热机更有指导意义。

三、目标函数 $\eta^\lambda P$ 的表达式

下面将根据上述模型导出不可逆卡诺热机的效率 η ，输出功率 P ，以及目标函数 $\eta^\lambda P$ 的表达式。

由于考虑了传热的不可逆性，所以热机的性能还与热传导规律有关，常用的热传导规律为牛顿定律，即有

$$Q_1 = \alpha(T_H - T_1)t_1 \quad (5)$$

$$Q_2 = \beta(T_2 - T_L)t_2 \quad (6)$$

而根据式(2)中 r 的意义，可将循环的周期 τ 写成

$$\tau = r(t_1 + t_2) \quad (7)$$

此外，根据热力学第二定律以及上述模型，当热机进行内可逆卡诺循环时，有

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2'}{Q_1} \quad (8)$$

应用式(4)，可将式(8)写成

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{IT_2}{T_1} \quad (9)$$

据此，不可逆卡诺热机的效率 η 可表为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{IT_2}{T_1} \quad (10)$$

而根据式(5) — (7)，可将不可逆卡诺热机的输出功率 P 表为

$$\begin{aligned} P &= \frac{Q_1 - Q_2}{\tau} \\ &= \frac{\alpha(1 - IT_2/T_1)}{r} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{T_H - T_1} + \frac{\alpha IT_2/T_1}{\beta(T_2 - T_L)} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

因此，目标函数 $\eta^\lambda P$ 可表为

$$\begin{aligned} \eta^\lambda P &= \frac{\alpha}{r} (1 - IT_2/T_1)^{\lambda+1} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{T_H - T_1} + \frac{\alpha IT_2/T_1}{\beta(T_2 - T_L)} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

四、 $\eta^\lambda P$ 最大时不可逆卡诺热机的 η 和 P

为了计算方便，令 $x = IT_2/T_1$ ， $y = T_1$ ，则式(12)可写成

$$\begin{aligned} \eta^\lambda P &= \frac{\alpha}{r} (1 - x)^{\lambda+1} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{T_H - y} + \frac{I\alpha/\beta}{y - IT_L/x} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

应用式 (13), 可得 $\eta^{\lambda}P$ 为极大值时, x 和 y 应满足的两个方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\eta^{\lambda}P) = & -\frac{\alpha}{r}(\lambda+1)(1-x)^{\lambda} \\ & \times \left(\frac{1}{T_H-y} + \frac{I\alpha/\beta}{y-IT_L/x} \right)^{-1} + \frac{\alpha}{r} \frac{I\alpha}{\beta} IT_L \\ & \times (1-x)^{\lambda+1} x^{-2} \left(y - \frac{IT_L}{x} \right)^{-2} \\ & \times \left(\frac{1}{T_H-y} + \frac{I\alpha/\beta}{y-IT_L/x} \right)^{-2} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\eta^{\lambda}P) = & -\frac{\alpha}{r}(1-x)^{\lambda+1} \\ & \times \left(\frac{1}{T_H-y} + \frac{I\alpha/\beta}{y-IT_L/x} \right)^{-2} \left[\frac{I\alpha}{\beta} \right. \\ & \left. \times \left(y - \frac{IT_L}{x} \right)^{-2} - (T_H-y)^{-2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

将式 (14) 和 (15) 化简, 分别可得

$$\begin{aligned} \frac{I\alpha}{\beta}(1-x)IT_L - (\lambda+1)x^2 \left(y - \frac{IT_L}{x} \right)^2 \\ \times \left(\frac{1}{T_H-y} + \frac{I\alpha/\beta}{y-IT_L/x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

和

$$\sqrt{\frac{I\alpha}{\beta}}(T_H-y) = y - \frac{IT_L}{x} \quad (17)$$

而由式 (17) 解得

$$y = \left(1 + \sqrt{\frac{I\alpha}{\beta}} \right)^{-1} \left(\sqrt{\frac{I\alpha}{\beta}} T_H + \frac{IT_L}{x} \right) \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (16), 简化后可得

$$(\lambda+1)T_H x^2 - \lambda IT_L x - IT_L = 0 \quad (19)$$

注意到 x 不能为负值, 则由式 (19) 可解得

$$x = \frac{IT_L}{T_H} \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4(\lambda+1)}{\lambda^2} \frac{T_H}{IT_L}} \right] \quad (20)$$

而由式 (18) 和 (20) 可解得

$$T_1 = y = \left(1 + \sqrt{\frac{I\alpha}{\beta}} \right)^{-1} \left[\sqrt{\frac{I\alpha}{\beta}} T_H - \frac{\lambda IT_L - \sqrt{\lambda^2 I^2 T_L^2 + 4(\lambda+1)IT_H T_L}}{2} \right] \quad (21)$$

$$\begin{aligned} T_2 = xy = & \left(1 + \sqrt{\frac{I\alpha}{\beta}} \right)^{-1} \\ & \times \left[\frac{\sqrt{\frac{I\alpha}{\beta}} \lambda IT_L - \sqrt{\lambda^2 I^2 T_L^2 + 4(\lambda+1)IT_H T_L}}{4(\lambda+1)} \right. \\ & \left. + IT_L \right] \end{aligned} \quad (22)$$

最后将式 (21) 和 (22) 代入式 (10) 和 (11), 可得 $\eta^{\lambda}P$ 最大时不可逆卡诺热机的效率 η_{λ} 和输出功率 P_{λ} 分别为

$$\eta_{\lambda} = 1 - \frac{IT_L}{T_H} \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4(\lambda+1)}{\lambda^2} \frac{T_H}{IT_L}} \right] \quad (23)$$

$$\begin{aligned} P_{\lambda} = & \frac{\alpha}{r(1 + \sqrt{I\alpha/\beta})^2} \left[T_H + \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 2}{2(\lambda+1)} IT_L \right. \\ & \left. - \frac{\lambda(\lambda+2)}{2(\lambda+1)} IT_L \sqrt{1 + \frac{4(\lambda+1)}{\lambda^2} \frac{T_H}{IT_L}} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

五, 三种特殊情况下的 η_{λ} 和 P_{λ}

现在讨论 $\lambda=0$, $\lambda=1$ 和 $\lambda \rightarrow \infty$ 三种特殊情况下不可逆卡诺热机的效率和功率。这三种情况很有意义, 它不仅具有代表性, 而且还提供了热机的一些重要性能参数。

1. $\lambda=0$ 的情况

这就是最大输出功率的情况, 它相当于以功率 P 作为目标函数进行讨论。这时由式 (23) 和 (24) 不难求得 η_0 和 P_0 分别为

$$\eta_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \eta_{\lambda} = 1 - \sqrt{\frac{IT_L}{T_H}} \quad (25)$$

$$P_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} P_{\lambda} = \frac{\alpha}{r(1 + \sqrt{I\alpha/\beta})^2} (\sqrt{T_H} - \sqrt{IT_L})^2 \quad (26)$$

显然, 当 $I=1$ 时, 式 (25) 和 (26) 就分别与Curzon和Ahlborn的结果式 (1) 和 (2) 相一致。这是物理上所期望的, 因为这时不可逆卡诺热机就转化为内可逆卡诺热机。而当 $I>1$ 时, 式 (25) 和 (26) 明确地表示了

不可逆卡诺热机由于存在传热以外的其它不可逆效应，以致其最大输出功率及其相应的效率都比内可逆卡诺热机的小。

将式 (25) 和 (26) 分别与式 (1) 和 (2) 比较可知， I 使效率的减小，相当于低温热源的温度提高了 I 倍，即由 T_L 提高到 IT_L 。而 I 使最大输出功率的减小则有两方面：一方面也是相当于 T_L 提高了 I 倍；另一方面则相当于工质与低温热源之间的热传导系数减小了 I 倍，即由 β 减到 β/I 。可见， I 对热机的最大输出功率的影响更为严重，并且与热传导系数 α 和 β 的数值有关。这是很值得注意的。文献[14]中认为，讨论不可逆卡诺热机的最大功率时“假设 α 与 β 不同，并不能导出具有重要意义的结论”。这显然是欠妥的，而事实上不可逆卡诺热机的最大功率是与热传导系数 α 和 β 紧密相关的。

另一方面，式 (25) 与文献[14]中所求出的“完全不可逆卡诺热机”在最大功率时的效率

$$\eta_{mI} = 1 - \sqrt{\frac{r_1 r_2 T_L}{T_H}} \quad (27)$$

形式上很相似。但两者是有区别的。式(27)中的 r_1 和 r_2 仅表示循环中绝热压缩和绝热膨胀两过程的不可逆程度^[14]，而式 (25) 中的 I 则代表除了传热不可逆性以外，循环中所有的其它不可逆程度，它包括了两个等温过程的其它不可逆性。所以仅当循环中两个等温过程只有传热的不可逆性时，才有 $I = r_1 r_2$ 。可见，用 I 表示不可逆程度既简单又全面，同时物理意义也较明确，它直接表示了不可逆卡诺热机比内可逆卡诺热机所增加的不可逆性。

2. $\lambda \rightarrow \infty$ 的情况

这时由式 (23) 和 (24) 不难求得

$$\eta_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \eta_\lambda = 1 - \frac{IT_L}{T_H} \quad (28)$$

$$P_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_\lambda = 0 \quad (29)$$

P_∞ 趋于零是很自然的，因为 $\lambda \rightarrow \infty$ 相当于以

效率 η 作为目标函数进行讨论，而未兼顾输出功率。这时若 $I = 1$ ，则有 $\eta_\infty = 1 - T_L/T_H = \eta_c$ (卡诺效率)。由于这时输出功率为零，与实际情况差别较大，所以实际热机不宜单纯追求高效率，而应适当兼顾功率。卡诺效率 η_c 虽有重要理论意义，但它不能作为实际热机的效率界限。应用 $\eta^\lambda P$ 作为目标函数讨论热机的最优化，只要适当选择 λ 的数值，便可求得较精确的效率界限，并可达到兼顾效率和功率的目的。

3. $\lambda = 1$ 的情况

这就是效率和功率同时并重的情况，因为这时目标函数变为 ηP 。由式(23)和(24)可得，这时效率和功率分别为

$$\eta_1 = 1 - \frac{IT_L}{T_H} \frac{1 + \sqrt{1 + 8T_H/(IT_L)}}{4} \quad (30)$$

$$P_1 = \frac{\alpha}{r(1 + \sqrt{I\alpha/\beta})^2} \left(T_H + \frac{S}{4} IT_L - \frac{3}{4} IT_L \sqrt{1 + \frac{8T_H}{IT_L}} \right) \quad (31)$$

下文将可看到，热机工作在这种状况下相对来说效率和功率都比较大，能达到兼顾热机效率和功率的目的。

六、三种情况的比较

为了比较上述三种情况，下面引进三个参数 a , b 和 c ,

$$a \equiv \eta_1/\eta_\infty \quad (32)$$

$$b \equiv \eta_1/\eta_0 \quad (33)$$

$$c \equiv P_1/P_0 \quad (34)$$

并令

$$\theta \equiv IT_L/T_H \quad (35)$$

则由式 (28) 和(30)，式 (25) 和 (30)，以及式 (26) 和 (30) 分别可得

$$a = \frac{4 - \theta - \sqrt{(8 + \theta)\theta}}{4(1 - \theta)} \quad (36)$$

$$b = \frac{4 - \theta - \sqrt{(8 + \theta)\theta}}{4(1 - \sqrt{\theta})} \quad (37)$$

$$c = \frac{4 + 5\theta - 3\sqrt{(8 + \theta)\theta}}{4(1 - \sqrt{\theta})^2} \quad (38)$$

而由式 (36)、(37) 和 (38) 分别可得

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} a = 1, \lim_{\theta \rightarrow 1} a = \frac{2}{3}, \frac{da}{d\theta} < 0 \quad (39)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} b = 1, \lim_{\theta \rightarrow 1} b = \frac{4}{3}, \frac{db}{d\theta} > 0 \quad (40)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} c = 1, \lim_{\theta \rightarrow 1} c = \frac{8}{9}, \frac{dc}{d\theta} < 0 \quad (41)$$

这些结果可如图 1 所示。式 (39) — (41)

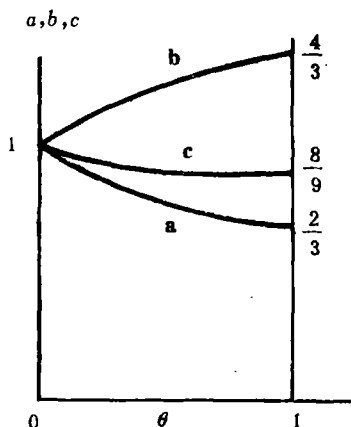


图 1

指出, a 随着 θ 的增大而单调地减小, 最大值为 1, 最小值为 $2/3$; b 随着 θ 的增大而单调地增大, 最小值为 1, 最大值为 $4/3$; c 随着 θ 的增大而单调地减小, 最大值为 1, 最小值为 $8/9$ 。由此可见, $\lambda = 1$ 时热机的输出功率和效率都比较大, 尤其输出功率与最大输出功率 P_0 相差不多, 至少也有 P_0 的 $8/9$, 而效率界限至少又可达最高界限 η_∞ 的 $2/3$, 比最大功率时的效率界限 η_0 有较显著的提高, 最高可达 η_0 的 $4/3$ 。因此, 热机工作在 $\lambda = 1$ 的情况下一般说来较为有利, 能达到兼顾效率和功率的目的。当然, 实际热机用途各异, 对效率和功率的要求不尽相同, 不能一概而论。本文采用带有权重因子 λ 的功率和效率的联合目标函数 $\eta^\lambda P$, 正是为了要满足这个要求。实际应用时可根据不同的具体情况来选择适当的 λ 值, 以便使热机工作在所需要

的最优状况。当 λ 选定后, 由式 (23) 和 (24) 所确定的 η_λ 和 P_λ , 将是所给情况下热机的最佳效率和功率。进一步分析尚可指出, λ 的适当取值范围一般不宜偏离 1 太远, 否则将难使热机的效率和功率得到较合理的兼顾。总之, η_1 和 P_1 这两个性能参数是重要的^[15], 可供热机优化设计中参考。事实上, 有了这两个参数, 将可使热机究竟应侧重考虑效率还是要侧重考虑功率更加明确, 从而可为分析和改进热机的性能提供一些新的理论依据。

七、简 例

最后, 以文献[1]中所引用过的三种设备作为例子, 以便更具体地说明热机工作在 $\lambda = 1$ 状况附近较为有利, 并由此阐明了引入不可逆程度 I 将可使有限时间热力学理论更进一步接近于实际。

为了更清楚地说明 $\lambda = 1$ 状况的优越性, 下面先设 $I = 1$, 计算的结果列入表 1。

表 1 三种动力设备的各参数值

动力源	T_L °C	T_H °C	η_∞ %	η_0 %	η_1 %	效率 η %	a	b	c
West Thurrock(U.K.) 燃煤蒸汽装置	~25	565	64.1	40.3	48.0	36	0.75	1.19	0.93
CANDU(Canada)PHW 核反应堆	~25	300	48.0	27.9	34.4	30	0.72	1.23	0.92
Larderello (Italy) 地热蒸汽装置	80	250	32.5	17.8	22.6	16	0.70	1.27	0.91

从表 1 清楚地看到, 实际热机工作在 $\lambda = 1$ 的情况时, 输出功率虽比最大功率 P_0 小, 但一般都可达 P_0 的 90% 以上 (见表中 c), 而效率一般可比 η_0 提高 20% 以上 (见表中 b)。这更具体地说明了热机工作在 $\lambda = 1$ 附近较为有利, 既有较大的输出功率, 又有较高的工作效率。另一方面, 虽然表 1 中效率的观测

值 $\eta_{\text{观测}}$ 比 η_1 小许多,而与 η_0 较为接近,似乎以 η_0 作为热机的效率界限更切合实际。其实不然,表1中只是 $I=1$ 的结果,而实际热机还存在其它不可逆性, $I>1$ 。所以只要对 I 的数值作出适当的估算,将可获得较精确的结果。例如,设 $I=1.1$,则表1中三种设备的 η_1 分别为44.9%、30.3%和17.7%,与效率的观测值36%、30%和16%较为接近。事实上,只要进一步分析实际热机的运转情况,根据各具体设备的实际工况较精确地估算 I 的数值,将可使结果更切合实际。

综上所述,在内可逆卡诺热机模型的基础上,引入不可逆程度 I 来描述除了传热以外的其它不可逆性,将可获得较精确的结果,它对实际热机更有指导意义。而采用 $\eta^\lambda P$ 作为目标函数对热机进行优化分析,将可使热机的效率和功率得到较合理的兼顾,所得结论可供热机优化设计中参考。总之,有限时间热力学的发展将可为热机提供更精确和完善的理论。

参 考 文 献

[1] Curzon, F L., Ahlborn, B. Efficiency of a Carnot Engine at Maximum Power Output. *Am. J. Phys.* 1975, (43):22
 [2] Rubin, M H. Optimal Configuration of a Class of Irreversible Heat Engines. I. *Phys. Rev. A.* 1979, (19):1272
 [3] Salamon, P. et al. Minimum Entropy Production and the Optimization of

Heat Engines. *Phys. Rev. A.* 1980, (21): 2115
 [4] Salamon, P., Nitzan, A. Finite Time Optimizations of a Newton's Law Carnot Cycle. *J. Chem. Phys.* 1981, (74): 3546
 [5] Rubin, M.H., Andrecen, B. Optimal staging of Endoreversible Heat Engines. *J. Appl. Phys.* 1982, (53):1
 [6] 严子浚. 卡诺热机的最佳效率与功率间的关系. *工程热物理学报.* 1985, (6):1
 [7] Devos, A. Efficiency of some Heat Engines at Maximum-Power Conditions. *Am. J. Phys.* 1985, (53):570
 [8] 方光耀. 二热源机的输出功率与热效率. *内燃机学报.* 1985, 3(3):193
 [9] 孙丰瑞、赖毓楠. 热源间热机的“全息”热效率——功率谱. *热能动力工程.* 1988, 3(3):1
 [10] 严子浚, 陈丽璇. 导热规律为 $q \propto \Delta^{-\frac{1}{\lambda}}$ 时的 η_m . *科学通报.* 1988, (33):1543
 [11] De Vos, A. Reflections on the Power Delivered by Endoreversible Engines. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1987, (20):232
 [12] Chen L. (陈丽璇), Yan Z. (严子浚). The Effect of Heat-Transfer Law on Performance of a Two-Heat-Source Endoreversible Cycle. *J. Chem. Phys.* 1989, (90):3740
 [13] 严子浚. $\varepsilon^\lambda R$ 最大时卡诺制冷机的 ε 和 R . *低温与超导.* 1985, 13(2):19
 [14] 李继坤. 不可逆卡诺热机的最大功率. *物理.* 1989, (18):89
 [15] 严子浚. ηP 最大时卡诺热机的 η 和 P . *自然杂志.* 1984, (7):475

η and P of an Endoreversible Carnot Engine at Maximum $\eta^\lambda P$

Yan Zijun (Xiamen University)

Abstract

The author introduces the degree of irreversibility to describe irreversibilities other than heat conduction, and establishes a model of irreversible Carnot engine based on the endoreversible Carnot engine. Then, $\eta^\lambda P$ is taken as an objective function to discuss the optimization of the model engines. The efficiency and power of such engines at maximum $\eta^\lambda P$ are derived, and the three cases $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ and $\lambda \rightarrow \infty$ are discussed in more detail.

Key Words: modern, thermodynamics, irreversibility, optimum design