

二次平滑数字滤波

马少陆 (哈尔滨船舶锅炉涡轮机研究所)

〔摘要〕 本文介绍了五点二次平滑数字滤波的原理及其算法,分析了采样周期对滤波器的影响,并给出了实例及其结果。

关键词 数字滤波 计算方法 取样 周期

1 概 述

由于计算机技术的迅速发展,数字滤波(或叫软件滤波)已被广泛地应用于信号处理系统及自动控制系统中。它不但几乎可以实现硬件滤波器的所有功能,而且还可以完成很多硬件滤波器无法完成的任务。它可以大大地提高测试系统的抗干扰能力和实验数据的准确性。

一般地讲,能够改变输入信号频谱的装置就叫做滤波器。例如在图1中输入信号 $X(s)$ 与输出信号 $Y(s)$ 具有不同的频谱,则称 $G(S)$ 为滤波器。 $G(S)$ 可以是一个有源或无源网络,也可以是调节器运算器等。 $G(S)$ 也可以由软件构成,即通过某种算法改变输入与输出的频率特性,显然此时滤波器为一个离散滤波器。

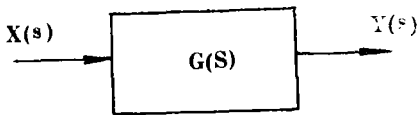


图 1

本文介绍一种由多项式算法得到的软件滤波器,它适用于过程参数变化比较缓慢的测试系统。它可以有效地抑制由于各种原因造成的测量误差,提高系统的测试精度。

2 基本 原理

设某一过程参数 x 是时间 t 的函数,即 $x = x(t)$, 它的一组实测等距数据为 $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 。其采样时刻为 $t = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ 。

现在想用用一个 m 次多项式

$$x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \quad (1)$$

逼近这组实验数据。由于 m 是一个有限的数,所以式(1)不能通过实验数据的所有点。

设式(1)对于每一个点的误差为 $R = \{R_0, R_1, \dots, R_n\}$ 。($n = 1, 2, 3, \dots$, 为点的个数) 即:

$$\begin{cases} R_0 = a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 + \dots + a_m t_0^m - x_0 \\ R_1 = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + \dots + a_m t_1^m - x_1 \\ \vdots \\ R_n = a_0 + a_1 t_n + a_2 t_n^2 + \dots + a_m t_n^m - x_n \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期 1989-10-08

修改稿 1990-03-15

现在希望能够找到一组数: $a = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, 使得 $\sum_{i=0}^n R_i^2$ 最小。因为这样的结果即能除去实验数据的高频成分又最接近实验数据。这是根据最小二乘法准则得出的结论。

设 $r(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n R_i^2$ 。为求它的极值, 令 $\frac{\partial r}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=0}^n R_i \frac{\partial R_i}{\partial a_k} = 0$

($k=0, 1, 2, \dots, m$)。

即:

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m a_j t_j^i - x_i \right) t_i^k = 0,$$

$$\text{也就是 } \sum_{i=0}^n x_i t_i^k = \sum_{j=0}^m a_j \sum_{i=0}^n t_i^{k+j} \quad (3)$$

当 k 取不同值时可以得到 $m+1$ 个线性方程, 解该线性方程组便可得到我们所需的那一组数 $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 。

这里需要指出的是, 这种多项式滤波器是一种低通滤波器, 它的频率特性与 m 和 n 的大小有着密切的关系。定性地讲, 当 m 接近 n ($m < n$) 时, 滤波器的输出频谱距输入信号频谱即频带加宽。当 $m = n$ 时滤波器已失去作用。当 $m \ll n$ 时, 滤波器频带变窄, 可以有效地抑制输入信号的高频成份。

在实时信号处理系统中, 为了提高运算速度, n 不宜取过大, 一般小于 7。为了抑制输入信号的高频成份 m 应小于 $0.8n$ 。

3 五点二次平滑滤波

现在我们来考虑五点二次平滑滤波 (即 $n=4, m=2$) 时的情况。

$$\text{设 } x(t_0) = a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 \quad (4)$$

其中: $t = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$

令: $T = t_i - t_{i-1}$ 叫做采样周期,

则: $t = \{0, T, 2T, 3T, 4T\}$ 。

为简化计算, 作变换:

$$t' = \frac{t_i - t_{i-1}}{T} - 2 \quad i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{即: } t' = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad (5)$$

把 (5) 式和 $m=4, n=2$, 代入 (3) 式, 并分别令 $k=0, 1, 2$, 则可得到一组线性方程:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5a_0 + 10a_2 & (k=0) \\ -2x_0 + x_1 + x_3 + 2x_4 = 10a_1 & (k=1) \\ 4x_0 + x_1 + x_3 + 4x_4 = 10a_0 + 34a_2 & (k=2) \end{cases} \quad (6)$$

由上式对 a_0, a_1, a_2 求解得:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{35}(-3x_0 + 12x_1 + 17x_2 + 12x_3 - 3x_4) \\ a_1 = \frac{1}{10}(-2x_0 - x_1 + x_3 + 2x_4) \\ a_2 = \frac{1}{14}(2x_0 - x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4) \end{cases}$$

把这一结果代入(4)式就可以得到五点二次平滑公式:

$$\begin{cases} \bar{x}_0 = \frac{1}{35}(31x_0 + 9x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 3x_4) \\ \bar{x}_1 = \frac{1}{35}(9x_0 + 13x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 5x_4) \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{35}(-3x_0 + 12x_1 + 17x_2 + 12x_3 - 3x_4) \\ \bar{x}_3 = \frac{1}{35}(-5x_0 + 6x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 9x_4) \\ \bar{x}_4 = \frac{1}{35}(3x_0 - 5x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 31x_4) \end{cases}$$

或写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 31 & 9 & -3 & -5 & 3 \\ 9 & 13 & 12 & 6 & -5 \\ -3 & 12 & 17 & 12 & -3 \\ -5 & 6 & 12 & 13 & 9 \\ 3 & -5 & -3 & 9 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

或: $[\bar{x}] = [A][x]$

式中 $[\bar{x}]$ 为平滑后的数据列向量。

$[x]$ 为未经平滑的数据列向量。

$[A]$ 为平滑变换矩阵, 它是一个实对称阵。

在实时信号处理系统中, 应将式(8)改写成

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{n-4} \\ \bar{x}_{n-3} \\ \bar{x}_{n-2} \\ \bar{x}_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_{n-4} \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中: x_n 为输入信号的第 n 次采样值。

\bar{x}_n 为经平滑滤波后的第 n 次输出值。

式(9)就是本文所要介绍的五点二次平滑滤波器的算法。

4 关于采样周期

我们知道在离散系统中,采样周期对系统的特性来说是至关重要的。

五点二次平滑滤波器的采样周期主要由以下几个因素决定:

4.1 被监测过程参数的真实频谱中的最高分量和干扰成份频谱的最低分量:笔者曾在计算机上进行过如下仿真实验。将一组离散的正弦波形的数据装入计算机,然后用不同的采样间隔对其进行平滑处理。处理前后的波形见图2。其中曲线1是未经平滑处理的数据波形。它

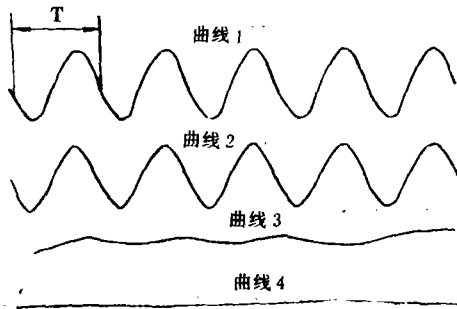


图 2

是由计算机发生的一组离散的正弦函数序列,其表达式为

$$x_k = \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_k\right), \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

式中 T 为正弦函数的周期。

曲线2.是经采样周期为 $0.1T$ 的五点二次平滑滤波处理后的波形,它与原数据几乎没有差别。可见此时滤波器再现了原数据的真实情况。

曲线3是经采样间隔为 $0.25T$ 的五点二次平滑滤波处理后的波形,原信号的交流成份受到了很大的抑制。

曲线4是经采样间隔为 $0.5T$ 的平滑处理后的波形,可以看出原信号的交流成份几乎全部被吃掉。

这一实验结果非常重要。它表明,要想再现被监测对象的真实面貌,采样周期必须小于被监测信号在没有任何干扰下的真实频谱中最高分量周期的十分之一。另一方面,它可能滤掉的部分只能是干扰信号中那些频率高于采样频率一半的成分。

这一要求并不苛刻,对于那些过程参数变化缓慢的系统来说是很容易满足的。

4.2 处理机硬件及软件的速度:在实时处理系统中,处理机必须在完成对本次采样值的平滑处理后,才能进行下一次采样,因此采样周期必须大于主机完成一次平滑处理所需的全部时间。在非实时处理系统中,采样周期不受这一限制。

在一般情况,对于八位机(如z-80或APPLE II等)使用BASIC语言,其处理周期约为0.2秒。若需更高的速度,可使用汇编语言或采用运算速度更高的处理机。

5 实际使用情况分析

我们曾将本滤波器应用于不锈钢着色工艺及其它一些热工测试系统中,并取得了良好效果。由于测试系统的被测参数及干扰信号都可以通过计算机来模拟,因此为便于说明问题,这里只给出一些计算机的仿真结果,供参考。

本滤波器比较适合于随机干扰信号较大的场合。随机干扰信号是测试系统中最常见而又较难清除的一种干扰。它主要来自测试现场的无规则干扰,测试系统本身的随机误差以及AD转换过程中的跳码与量化误差等等。由于随机干扰信号具有较宽的频谱,所以无论使用何种滤

波器要将其完全清除掉是不可能的。特别是对于低速、缓慢的过程参数硬件滤波器更是无能为力。但此时使用本滤波器却可以得到很好的效果。

图3和图4给出了两个例子，它们分别是加入幅度为30%和50%的随机干扰信号再经五点二次平滑滤波处理的情形。

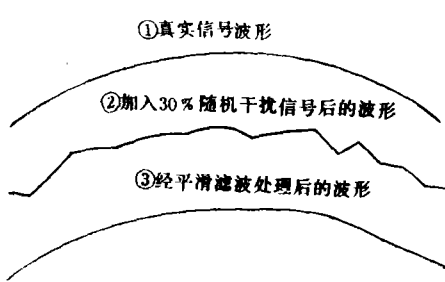


图 3

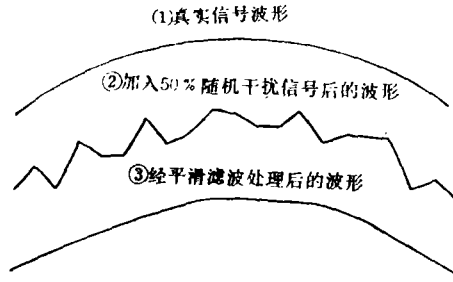


图 4

6 五点三次平滑滤波

最后，我们在这里给出五点三次平滑滤波的计算公式，供读者参考。它具有比二次平滑滤波更宽的频带。其表达式如下（推导从略）：

$$\begin{bmatrix} x_{n-4} \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 69 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 4 & 54 & 24 & -16 & 4 \\ -6 & 24 & 34 & 24 & -6 \\ 4 & -16 & 24 & 54 & 4 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 69 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-4} \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

参 考 文 献

- 1 张德荣，王新民，高安民。计算方法与算法语言。高等教育出版社，1981年12月
- 2 武汉大学数学系。线性代数。人民教育出版社，1977年11月
- 3 黄席裕，高顺泉。滤波器综合法设计原理。人民邮电出版社，1978年10月
- 4 聂铁军。计算方法。国防工业出版社，1988年

Quadratic Wave-Smoothing Digital Filtration

Ma Shaolu

(Harbin Marine Boiler & Turbine Research Institute)

Abstract

The author describes the principle and calculation method of five-point quadratic wave-smoothing digital filtration and analyses the effects of sampling rate on the filter. Some examples with results are given.

Key Words *digital filtration, filtration theory sampling rate*