卡诺热机的最佳利润与效率间的关系

陈林根　孙丰瑞　陈文振（海军工程学院）

〔摘要〕 本文导出牛顿定律系统卡诺热机的最佳利润与效率间的关系，并得到最大利润时的效率界限。其结果包含了最大功率和最小熵产率（也即最小㶲损失）两种特例。籍此，作者首次提出了有限时间㶲经济分析和有限时间㶲经济性能界限的概念，为统一现代热力学的各分支研究开拓了方向。

关键词　现代热力学　卡诺热机　内可逆循环　㶲经济分析　最优设计

1 引　言

自从Curzon和Ahlborn[1]于1975年首次提出有限时间热力学以来，在已经发表的150多篇有关热机、热泵、制冷机等能量系统有限时间热力学研究文献中，仅Salamon和Nitzan[2]在研究牛顿定律卡诺循环最大功率、最大热效率、最大㶲效率及最小熵产的同时，讨论了最大利润问题，得到最大利润为

$$\pi_{max}=\varphi_P\frac{1}{4}\alpha\left[\sqrt{T_H(1-\varepsilon_1\varphi_A/\varphi_P)}-\sqrt{T_L(1-\varepsilon_2\varphi_A/\varphi_P)}\right]^2 \quad (1)$$

式中，φ_P、φ_A 分别为输出功率和输入㶲价格，α为工质与热源间的传热系数，T_H、T_L分别为高、低温热源温度，ε_1、ε_2分别为工作在环境温度T_0与T_H、T_L间可逆热机的效率。

本文则进一步导出利润与效率间的一般关系和最佳关系，并得到最大利润时的效率界限。

2 利润、效率的普遍关系

考虑工作于T_H、T_L热源间的内可逆卡诺热机，设工质与高、低温热源间的传热系数分别为α、β，而工质的吸、放热过程时间分别为t_1、t_2，且工质热源间的传热服从牛顿传热定律（线性传热），则工质的吸、放热量为

$$Q_1=\alpha(T_H-T_{WH})t_1 \quad (2)$$

$$Q_2=\beta(T_{WL}-T_L)t_2 \quad (3)$$

式中，T_{WH}、T_{WL}分别为工质的吸、放热温度。忽略两个绝热过程进行的时间，则循环周期为

$$\tau=t_1+t_2 \quad (4)$$

循环的输出功率为

$$P=(Q_1-Q_2)/(t_1+t_2)=(1-Q_2/Q_1)/(t_1/Q_1+t_2/Q_1) \quad (5)$$

由内可逆循环性质可有循环效率为

$$\eta=1-Q_2/Q_1=1-T_{WL}/T_{WH} \quad (6)$$

由式（2）、（3）和（6）可将式（5）写为

$$P=\alpha\eta/\left[(T_H-T_{WH})^{-1}+\delta^2(1-\eta)\left[(1-\eta)T_{WH}-T_L\right]^{-1}\right],\delta=\sqrt{\alpha/\beta} \quad (7)$$

设热机的工作环境温度为T_0，则相同初、终条件下热机所能作出的可逆功为

$$W_{rev}=Q_1\left(1-\frac{T_0}{T_H}\right)-Q_2\left(1-\frac{T_0}{T_L}\right)$$

收稿日期　1990—01—24　　修改定稿　1990—12—14　　本文联系人　陈林根　武汉　430033

$$= Q_1\varepsilon_1 - Q_2\varepsilon^2 \quad (8)$$

设热机的输出功率价格为φ_P，而输入㶲价格为φ_A，则热机的回收率为

$$R = \varphi_P W/\tau = \varphi_P \rho \quad (9)$$

设热机工作过程的唯一投入能为来自热源的㶲A，对每个循环有

$$A = W_{rev} = Q_1\varepsilon_1 - Q_2\varepsilon_2 \quad (10)$$

则对应的单位时间费用（费用率）为

$$C = \varphi_A A/\tau \quad (11)$$

故有循环的利润为

$$\pi = R - C = [(\varphi_P - \varphi_A\varepsilon_1)Q_1 - (\varphi_P - \varphi_A\varepsilon_2)Q_2]/\tau$$
$$= \alpha[(\varphi_P - \varphi_A\varepsilon_2)\eta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varphi_A]/\{(T_H - T_{WH})^{-1} + \delta^2(1-\eta)[(1-\eta)T_{WH} - T_L]^{-1}\} \quad (12)$$

式（12）即为所求的利润、效率普遍关系式。

需要指出的是，为了保证热力过程能够获利，输出功率和输入㶲价格之间须有

$$\varphi_P > \varphi_A \quad (13)$$

因为一单位㶲输入至少应该产生一单位的功输出。

3 利润、效率间的最佳关系

由式(12)可应用极值条件 $(\alpha\pi/\alpha T_{WH})_\eta = 0$ 求出结定的效率下对应于最佳利润的工质最佳吸热温度为

$$T_{WHopt} = \frac{\delta T_H + T_L/(1-\eta)}{1-\delta} \quad (14)$$

相应的工质最佳放热温度为

$$T_{WLopt} = \frac{\delta T_H(1-\eta) + T_L}{1+\delta} \quad (15)$$

将式（14）、（15）代入式（12），可得给定效率下的最佳利润为

$$\pi_m = \frac{\alpha\varphi_P}{(1+\delta)^2}\left(T_H - \frac{T_L}{1-\eta}\right)$$
$$[(1-\varepsilon_1\varphi_A/\varphi_P) - (1-\varepsilon_2\varphi_A/\varphi_P)(1-\eta)] \quad (16)$$

可以证明式（16）也确定了给定利润时的最佳效率，故称式（16）为利润、效率间的最佳关系。

3.1 从式（16）可知，当

$$\eta = 1 - T_L/T_H = \eta_C \quad (17)$$

或

$$\eta = 1 - (1-\varepsilon_1\varphi_A/\varphi_P)/(1-\varepsilon_2\varphi_A/\varphi_P) \quad (18)$$

时，$\pi_m = 0$，即当热机效率达到可逆卡诺效率 η_c时，利润为零。因此，由于热阻的存在，卡诺效率不是实际热机所能达到的界限。

3.2 由式（16）利用极值条件

$$d\pi_m/d\eta = 0 \quad (19)$$

可求得最大利润及其对应的效率界限为

$$\pi_{max} = \frac{\alpha\varphi_P}{(1+\delta)^2}$$
$$[\sqrt{T_H(1-\varepsilon_1\varphi_A/\varphi_P)} - \sqrt{T_L(1-\varepsilon_2\varphi_A/\varphi_P)}]^2 \quad (20)$$

$$\eta_m = 1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H}\frac{1-\varepsilon_1\varphi_A/\varphi_P}{1-\varepsilon_2\varphi_A/\varphi_P}} \quad (21)$$

当$\beta = \alpha$，即$\delta = 1$时，式(20) 即成为式（1）。由于文献[1]仅给出了 $\alpha = \beta$ 时的最大利润，而本文则给出了任意效率下的最佳利润、效率关系，并得到了最大利润时的效率界限。

3.3 当输出功价格远大于输入㶲价格，即$\varphi_P \gg \varphi_A$时，可有$\varphi_A/\varphi_P \to 0$，则式(16) 变为

$$\pi_m = \varphi_P\frac{\alpha}{(1+\delta)^2}\left(T_H - \frac{T_L}{1-\eta}\right)\eta \quad (22)$$

即$\pi_m = \varphi_P P$，最大利润变为最大功率，而

$$P = \frac{\alpha}{(1+\delta)^2}\left(T_H - \frac{T_L}{1-\eta}\right)\eta \quad (23)$$

即为文献[3]给出的最佳效率、功率关系，而式（21）所示的效率界限为

$$\eta_m = 1 - \sqrt{T_L/T_H} \quad (24)$$

即为著名的CA效率[1]。因此，当 $\varphi_A/\varphi_P \to 0$ 时，最佳利润目标就转化为最佳功率目标。

3.4 当输出功价格接近于输入㶲价格，即

$\varphi_A/\varphi_P \to 1$时，式（16）变为

$$\pi_m = \frac{\alpha\varphi_P}{(1+\delta)^2}\left(T_H - \frac{T_L}{1-\eta}\right)\left[(1-\varepsilon_1)-(1-\varepsilon_2)(1-\eta)\right] = -\frac{\alpha\varphi_P}{(1+\delta)^2}\frac{1-\varepsilon_1}{T_L(1-\eta)}\left[T_H(1-\eta)-T_L\right]^2 < 0 \qquad (25)$$

即此时无论在什么效率下工作，均不可能盈利。而最大的利润为零，此时的效率界限为卡诺效率。即仅当效率达到卡诺效率时，收益才与投入成本相当；而当效率小于卡诺效率时，收益始终小于投入成本。而由文献〔3〕给出的最佳熵产率与效率间的关系

$$\sigma = \frac{\Delta s}{\tau} = \frac{\alpha}{(1+\delta)^2}\frac{\left[T_H(1-\eta)-T_L\right]^2}{T_H T_L(1-\eta)} \qquad (26)$$

注意到式（25）中的$1-\varepsilon_1 = T_0/T_H$，可知

$$\pi_m = -\varphi_P T_0 \sigma = -\varphi_P T_0 \Delta s/\tau \qquad (27)$$

即当$\varphi_A/\varphi_P \to 1$时，最佳利润目标就转化为最小熵产率目标，即最小㶲损失（$T_0\Delta s$）目标。

3.5 实际情况下，有

$$0 < \varphi_A/\varphi_P \leq 1 \qquad (28)$$

故最大利润目标介于最大功率目标和最小熵产率（最小㶲损失）目标之间。而式（16）则不仅给出了最佳的利润、效率关系和最大利润时的效率界限，而且也包含了最佳功率、效率关系和最小熵产率（㶲损失）与最佳效率关系。

4 有限时间㶲经济优化

上述分析讨论已超出传统的有限时间热力学研究范围。由于引入了㶲价格，进行了㶲经济优化分析，因此以上讨论是有限时间热力学与㶲经济优化结合的结果，笔者拟将此交叉性研究称为“有限时间㶲经济分析”。

通常称卡诺效率为热机的经典热力学界限或可逆性能界限，而把式（24）所示的CA效率称为热机的有限时间热力学性能界限。笔者拟将式（21）所示的最大利润时的效率界限称为热机“有限时间㶲经济性能界限”，它包含了经典热力学可逆界限和有限时间热力学界限，具有更普遍的意义。与经典热力学界限和有限时间热力学界限一样，“有限时间㶲经济性能界限”也可由卡诺热机推广到卡诺热泵、卡诺制冷机、三热源热泵和三热源制冷机，导出它们各自的比经典热力学界限和有限时间热力学界限更普遍的界限值。

进一步研究，可导出与两源热机参数选择的有限时间热力学准则[4,5]和两源制冷、泵热循环参数选择的有限时间热力学准则[6-8]相对应的热机、制冷和泵热循环的有限时间㶲经济优化准则。

5 结束语

本文导出的最佳利润、效率关系式（16）和最大利润对应的效率界限式（21）的意义已经超出了公式本身所具有的价值。同时表明，有限时间热力学与㶲经济分析相结合，将为热机理论提供新的基础。而将有限时间热力学与现代热力学中的其它几个分支（如第二定律效率分析，热经济学和非平衡过程热力学等）相结合，将会构成一个新的边缘性综合学科，笔者拟将其称为“有限时间综合经济分析”。对此将继续开展这方面的研究工作。

参考文献

1 Curzon F L, Ahlborn B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power owtput. Am. J. Phys., 1975, 43(1): 22—24
2 Salamon P, Nitzan A, Finite time optimizations of a Newton's law Carnot cycle. J. Chem. Phys., 1981, 74(6): 3546—3560
3 严子浚. 卡诺热机的最佳效率与功率间的关系. 工程热物理学报, 1985, 6(1): 1—6
4 孙丰瑞，赖锡棉. 热间热机的“全息”热效率功

率谱.热能动力工程，1988，3 (3) :1—9

5 陈文振，孙丰瑞，陈林根．热源间热机热工参数选择的有限时间热力学准则．科学通报，1990，35(3):237—240

6 孙丰瑞，陈文振，陈林根。二源间反向内可逆卡诺循环全谱分析及最佳参数的选择.工程热物理学会第六届年会论文，1988

7 陈文振，孙丰瑞，陈林根．二源间制冷和泵热循环参数选择的有限时间热力学准则。科学通报，1990，35 (11)

8 陈林根，孙丰瑞，陈文振．论卡诺制冷机的基本优化关系与优化准则，低温工程（待发表）

The Relationship between Carnot Heat Engine Maximum Profit and Efficiency

Chen Lingen, Sun Fengrui, Chen wenzhen

(*Naval Engineering Institute*)

Abstract

This paper provides a derivation of the relationship between the maximum profit and efficiency for a Carnot heat engine of Newton's law system and gives the efficiency boundary at the maximum profit point. The results obtained include two specific examples featuring a maximum power output and minimum entropy production rate (namely, minimum exergy loss). Based on this, the authors for the first time have put forth the conception of a finite time exergy economic analysis and finite time exergy economic performance boundary, which will pave the way for an unified study of the various branches of modern thermodynamics.

Key words: *modern thermodynamics, Carnot heat engine, inner reversible cycle, exergy economic analysis, optimum design*

锅 炉 的 节 能 措 施

据“Power”1990年7月号报道，美国俄亥俄州辛辛那提市Garfield电力公司最近在锅炉上采用了一种新的节能措施。这种方法是改变风扇的速度以满足锅炉通风的要求。锅炉传统的控制装置是使鼓风机全速工作而通过调节挡板来调节空气的流量。新的控制方法可以使鼓风机以显著减少的速度工作，从而减少了耗电量。提供了微机监控和调节。与老式机械系统比较，这种新型的电子控制系统提供了更加平稳、更加精确的通风调节，从而提高了锅炉的效率，可使蒸发率增加10—16%，从而取得明显的经济效益。这种控制系统的关键要素是：

- 把现有挡板控制的气动信号转换成电子信号的方法和程序设计。
- 用来加工处理精确控制锅炉鼓风机速度的180个离散模拟输出信号的可编程序微处理机。
- 用于大功率鼓风机交流电动机变速驱动的控制器。

（吉桂明 供稿）