叶片固有频率散度的计算

刘 岩 金介荣

（哈尔滨船舶锅炉涡轮机研究所）

〔摘要〕根据文献〔1〕提出的参数小变化对本征值影响的思路及弯矩法导出在参数小变化时固有频率散度的简便计算公式。并以某型压气机叶片为例，给出小偏差的理论计算值与实测数据的对比结果，其方法可用于叶片固有频率散度的工程计算和频谱分析。

关键词 压气机 叶片频率散度 计算

1 引 言

文献〔1〕、〔3〕先后提出了参数小变化对结构固有振动的影响，其基本原理以一个变截面梁的固有振动为例，给出了梁的（角）频率ω，它可用泛函的驻立值表示：

$$\omega^2 = \lambda = st \frac{\int_0^l EJ(w'')^2 dx}{\int_0^l mw^2 dx} \tag{1}$$

其中EJ是梁的弯曲刚度；m是单位长度内的质量；w是梁的挠度，它可视为泛函的自变函数，它先满足位移协调条件。

根据变分原理将公式（1）变分后整理得：

$$\delta\lambda/\lambda = \left(\int_0^l \delta(EJ)(w'')^2 dx \Big/ \int_0^l EJ(w'')^2 dx\right) - \left(\int_0^l \delta m w^2 dx \Big/ \int_0^l mw^2 dx\right) \tag{2}$$

其中$\delta\lambda$表示由于$\delta(EJ)$、δm引起的频率的变化；$\delta(EJ)$表示弯曲刚度的变化；δm表示质量的变化。我们在此基础上，把小参数的基本原理用于里兹法。小参数法的基本原理详见文献〔1〕、〔3〕。

2 叶片固有频率散度计算公式的推导

对叶片固有频率的散度计算，以压气机叶片为例。里兹法计算叶片固有频率的计算公式为

$$P_{iw} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i^2}{EJ} dx \Big/ \left\{\int_0^l PF\left[\left(\int_0^l\int_0^l \frac{\overline{M}_i}{EJ} \sin\alpha\, dx dx\right)^2 + \left(\int_0^l\int_0^l \frac{\overline{M}_i}{EJ} \cos\alpha\, dx dx\right)^2\right] dx\right\} \tag{3}$$

式中$i = 1，2$，i表示阶数，$PF = m$。

收稿日期：1991-03-08 修改定稿：1991-07-15

本文联系人：刘岩 男 29 哈尔滨 150036

设
$$B=\left(\int_0^l\int_0^l\frac{\overline{M}_i}{EJ}\sin\alpha dxdx\right)^2+\left(\int_0^l\int_0^l\frac{\overline{M}_i}{EJ}\cos\alpha dxdx\right)^2$$

压气机叶片的固有振动问题用里兹法可表示成如下泛函的驻立值问题

$$P_{iw}^2=\lambda=st\left[\int_0^l\frac{\overline{M}_i^2}{EJ}dx\Big/\left(\int_0^l mBdx\right)\right]\tag{4}$$

其中$\overline{M}_i$表示第 i 阶弯曲振动时叶片各截面上承受的弯矩。

对式（4）两端取变分得：

$$\begin{aligned}\delta P_{0w}^2&=\left[\int_0^l\delta\left(\frac{\overline{M}_i^2}{EJ}\right)dx\int_0^l m[B]dx-\int_0^l\delta(m[B])dx\int_0^l\frac{\overline{M}_i^2}{EJ}dx\right]\Big/\left(\int_0^l m[B]dx\right)^2\\&=\int_0^l\delta\left(\frac{\overline{M}_i^2}{EJ}\right)dx\Big/\left(\int_0^l m[B]dx\right)-\left[\int_0^l\delta(m[B])dx\Big/\left(\int_0^l m[B]dx\right)\right]P_{ow}^2\\&=P_{ow}^2\left[\int_0^l\delta\left(\frac{\overline{M}_i^2}{EJ}\right)dx\Big/\left(\int_0^l\frac{\overline{M}_i^2}{EJ}dx\right)-\int_0^l\delta(m[B])dx\Big/\left(\int_0^l m[B]dx\right)\right]\end{aligned}\tag{5}$$

$$\delta\left(\frac{\overline{M}_i^2}{EJ}\right)=-\frac{\overline{M}_i^2\delta(EJ)}{(EJ)^2}\tag{6}$$

$$\delta(m[B])=\delta m[B]+m\delta[B]\tag{7}$$

设

$$\begin{aligned}A=2\Big[&\int_0^l\int_0^l\frac{\overline{M}_i}{EJ}\sin\alpha dxdx\cdot\int_0^l\int_0^l\frac{\overline{M}_i}{(EJ)^2}\delta(EJ)\sin\alpha dxdx\\&+\int_0^l\int_0^l\frac{\overline{M}_i}{EJ}\cos\alpha dxdx\cdot\int_0^l\int_0^l\frac{\overline{M}_i}{(EJ)^2}\delta(EJ)\cos\alpha dxdx\Big]\end{aligned}\tag{8}$$

将式（6）、（7）、（8）代入式（5）整理得：

$$\begin{aligned}\delta(P^2{}_{iw})/P^2{}_{iw}=&\int_0^l mAdx\Big/\left(\int_0^l mBdx\right)-\int_0^l\frac{\overline{M}_i^2}{(EJ)^2}\delta(EJ)dx\Big/\\&\left(\int_0^l\frac{\overline{M}_i^2}{EJ}dx\right)-\int_0^l\delta mBdx\Big/\left(\int_0^l mBdx\right)\end{aligned}\tag{9}$$

这样就得到了用弯矩法计算叶片固有频率散度的计算公式。

计算叶片固有频率散度的一般步骤：

a. 在计算叶片的频率散度时，先利用求叶片振动频率理论值P_{iw}，EJ、m取设计理论值。

b. $\delta(EJ)$、$\delta(m)$ 表示由于公差引起的刚度和质量的变化量。可由给定的公差带计算出$\delta(EJ)$和δm，然后按公式（9）即可计算出由于加工的误差而引起的频率分散度。

散度的计算结果可以用来评价叶片的加工质量。如叶片频率实测值超过计算的频率散度，说明加工误差引起叶片质量和几何尺寸已超过规定的公差带，需进行修整处理。

3　某型压气机叶片固有频率的散度计算与实测结果比较

以某型压气机叶片为例，计算结果同实测结果见表 1。其中实测频率指的是每级单个叶片的实测值。表 1 中列出叶片振动一阶频率值，表 2 列出的各级叶片长度和中截面的面积，以此说明叶片固有频率的散度同叶片的长度和面积之间的关系。

表 1

	频率理论值	散度（一阶频率）		$\frac{\Delta P\times 2}{(P_{min}+P_{max})}\%$	备　注
		P_{min}	P_{max}		
计算值	275	245	307	11%	第 1 级叶片
实测值		278	299	7.2%	
计算值	529	459	607	13.7%	第 4 级叶片
实测值		547	583	6.3%	
计算值	1072	1 372	1 667	19%	第 9 级叶片
实测值		1 532	1 652	7.6%	

注：计算值是单侧公差，实测值是经过修频后装机叶片实测频率值范围。

表 2

级　　数	第 1 级叶片	第 4 级叶片	第 9 级叶片
叶片长度(cm)	12.485	8.18	4.25
叶片中截面面积(cm^2)	1.214	0.88	0.755

从表 1 和表 2 中可以得出如下结论。

a. 对于相对较长的叶片，其频率散度一般集中分布在计算值之间；较短的叶片频率的散度集中分布在散度计算值较大的一端，通常在极限公差较大的一端 2/3 至极限公差处。

这主要是由于较短的叶片面积较小，加工比较困难，加工时为了保证叶片的强度，一般接近上偏差。因此较短的叶片散度集中分布在散度计算值较大的一端。

b. 随着叶片缩短，计算散度值越来越大，这是由于各级叶片的公差带一般均相同，但对短薄叶片来说$\delta m/m$和$\delta(EJ)/EJ$值较长叶片大的缘故。

应当指出，散度计算中没有考虑根部夹紧力的影响，因此这一方法在用于涡轮叶片频率分析时，应注意保持相同的夹紧力以减少误差。

以某型压气机的频谱分析为例说明固有频率散度计算的应用。

图1中的虚线部分表示散度频率值的宽度，实线部分表示频率的计算值。在工作区，频率曲线（实际上是由频率分散度形成的频率带）不能与“粗线”有交点，以保证在此区间不发生整数的倍频。

图 1 中的阴影部分表示（100～80)%工率工况的工作区域。按设计要求，为了保证加速机组的正常运行，必须确保（100～80)%工率工况区域内不发生共振，（即相对转速$\vec{n}$ = 1.0～0.964 5 的区域内），同时，为满足压气机调整的需要，以及保证适当的超负荷能力，对于从相对转速$\vec{n}$ = 0.8 到相对转速$\vec{n}$ = 1.1 的整个范围予以注意，尽量保证在此区间不发生

整数的倍频。

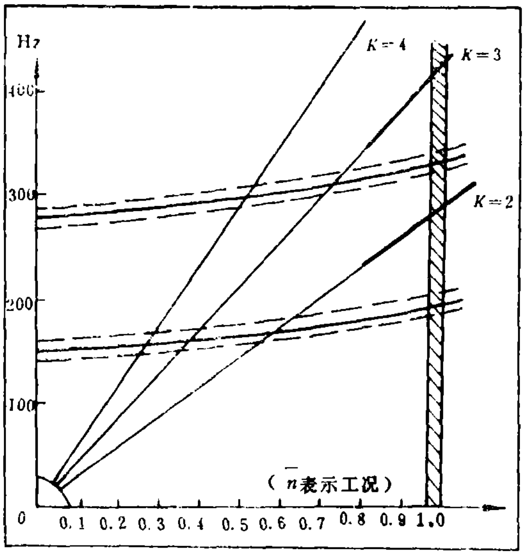

图 1　某压气机的频谱分析图

参 考 文 献

1　胡海昌．参数小变化对本征值的影响．力学与实践，1981(2)

2　胡海昌．参数小变化对结构固有扭动的影响．上海力学学会论文，1983

3　胡海昌．弹性力学的变分原理及其应用．科学出版社，1982，1981年

（孙显辉　编辑）

The Calculation of Blade Natural Frequency Dispersity

Liu Yan, Jin Jierong

(Harbin Marine Boiler & Turbine Research Institute)

Abstract

In accordance with the idea, expressed in literature (1) concerning the effect of small changes of parameters on eigenvalues this paper provides a simplified calculation formula for natural frequency dispersity in case of small changes in parameters. Taking the blades of a certain type of compressor as an example, the authors also give the results of comparison between the actually measured data and the theoretically calculated values of small deviations. The method proposed in this paper can be used for frequency spectrum analysis and engineering calculation of blade natural frequency dispersity.

Key words: *compressor, blade frequency dispersity, calculation*