由实测响应曲线数值求解传递函数

陈金娥
(上海电力学院)

〔摘要〕 根据系统实测的输入信号曲线与输出响应曲线,利用理论分析与数值计算相结合的方法求解出该系统的传递函数,计算实例表明本方法具有较高精度。

关键词　传递函数　响应曲线　自动控制　数值计算
分类号　TK32

1　引　言

在研究热能动力系统(如锅炉、汽轮机等)的仿真与控制技术时,必须要研究系统的动态特性。在理论研究时,往往是首先把实际的系统归结为一个理论模型,然后根据此理论模型建立起描述该系统动态特性的微分方程。而一般系统的微分方程的求解是相当困难的,因此,为方便起见,工程上对于线性系统常常采用传递函数分析法。由于传递函数既可以象系统的微分方程及其瞬态解一样有效地反映出系统的动态特性,又可以免去求解微分方程的繁琐计算,因此,传递函数分析法是描述线性系统动态特性的一种简便而有效的数学方法,这种方法在对系统的动态特性进行分析中具有很重要的作用[1,2,3]。

求解传递函数的方法有几种,目前工程中常用的方法是根据飞升曲线的形状来近似求取系统的传递涵数,这种方法有一定误差。本文将通过对实测动态响应曲线的理论分析与数值计算相结合的方法来求得传递函数,从文中所列举的算例看出,本文所述的方法具有较高的精确度。

2　传递函数的形式

在利用数值计算求解传递函数之前,首先需要给出传递函数的形式,在文献〔1〕中曾经介绍了以下几种传递函数的形式。

2.1　传递函数表示成多项式的形式

$$W(S) \approx B_0 - B_1S + B_2S^2 - B_3S^3\cdots\cdots \tag{1}$$

2.2　传递函数表示成分母多项式的形式

$$W(S) \approx \frac{1}{A_0 + A_1S + A_2S^2 + \cdots\cdots} \tag{2}$$

2.3 传递函数表示成一般的有理分式的形式

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{A_0 + A_1S + \cdots\cdots + A_MS^M}{B_0 + B_1S + \cdots\cdots + B_NS^N} \tag{3}$$

其中 $X(S)$ 和 $Y(S)$ 分别为输入信号曲线与输出响应曲线的拉普拉斯变换式,这种形式比前两种形式更具有一般性,因而在工程中被普遍采用,显然前两种形式可以看作为这种形式的特殊形式,本文将采用这种一般形式

收稿日期　1994　05　20　收修改稿　1994　09　10
本文联系人　陈金娥　女　54　教授　200090　上海市平凉路 2103 号动力系

进行讨论，于是问题就归结为如何由输入信号曲线与输出响应曲线来计算它们的拉普拉斯变换式 $X(S)$ 和 $Y(S)$。本文将输入信号曲线与输出响应曲线拉普拉斯变换式 $X(S)$ 和 $Y(S)$ 也写成一般的有理分式的形式：

$$Y(S)=\frac{a_0+a_1S+\cdots\cdots+a_mS^m}{b_0+b_1S+\cdots\cdots b_nS^n} \quad (4)$$

$$X(S)=\frac{a_0'+a_1'S+\cdots\cdots+a_{m'}'S^{m'}}{b_0'+b_1'S+\cdots\cdots b_{n'}'S^{n'}} \quad (5)$$

这样，传递函数 $W(S)$ 可以写为：

$$W(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=[(a_0+a_1S+\cdots\cdots+a_mS^m)(b_0'+b_1'S+\cdots\cdots b_{n'}'S^{n'})]/[(b_0+b_1S+\cdots\cdots b_nS^n)(a_0'+a_1'S+\cdots\cdots+a_{m'}'S^{m'})] \quad (6)$$

将此式的分子与分母分别相乘后不难得到公式(3)中的等号右边的形式。为了求出传递函数$W(S)$必须确定指数m、n、m'、n'以及待定系数 $a_i(i=0,1,2\cdots\cdots m)$、$b_j(j=0,1,2\cdots\cdots n)$、$a_{i'}'(i'=0,1,2\cdots\cdots m')$、$b_{j'}'(j'=0.1,2\cdots\cdots n')$。

由于 $X(S)$ 与 $Y(S)$ 的函数形式完全相似，由实测输入信号 $x(t)$ 求解其拉普拉斯变换式的方法，与由实测输出响应曲线 $y(t)$ 来求解其拉普拉斯变换式的方法完全相同，为避免不必要的重复，本文只叙述如何由实测响应曲线 $y(t)$ 来求解其拉普拉斯变换式 $Y(S)$。另外，我们也可以先利用作者在文献〔4〕中所介绍的方法，将实测的输入信号曲线$x(t)$与输出响应曲线$y(t)$换算成单位阶跃响应曲线$y_s(t)$，然后求出$y_s(t)$的拉普拉斯变换式$y_s(S)$，由于单位阶跃的拉普拉斯变换式为$\frac{1}{S}$，因此传递函数可以写为：

$$W(S)=s\cdot Y_s(S) \quad (7)$$

下面我们将讨论如何由实测响应曲线 $y(t)$ 来确定 $Y(S)$ 表示式中的指数 m、n 以及各项系数 $a_i(i=0,1,2\cdots\cdots m)$、$b_j(j=0,1,2\cdots\cdots n)$。关于指数 m 与 n 的确定是并不困难的，这将在本文最后一节的算例中进行讨论。当指数 m 与 n 一旦被确定以后，各项系数 $a_i(i=0,1,2\cdots\cdots m)$ 与 $b_j(j=0,1,2\cdots\cdots n)$ 就可以通过理论分析与数值计算的方法求出。

3　待定系数的求解方法

在 $Y(S)$ 的一般式(4)中，待定系数 $a_i(i=0,1\cdots\cdots m)$ 与 $b_j(j=0,1\cdots\cdots n)$ 共有 $m+n+2$ 个，但其中有一个系数是不独立的。由于当 $S=0$ 时，

$$Y(0)=\frac{a_0}{b_0} \quad (8)$$

因此，可以根据 $Y(0)$ 的值来确定两个系数 a_0 和 b_0 在一般情况 $Y(0)=\int_0^\infty y(t)\mathrm{d}t\neq 0$，则不妨取 $a_0=1$，由式(8)可得 $b_0=\frac{1}{Y(0)}$。在某种特殊情况若 $Y(0)=\int_0^\infty y(t)\mathrm{d}t=0$，则显然得 $a_0=0$，不妨取 $b_0=1$。

根据上述分析，于是式(4)中还有 $m+n$ 个待定系数，即 $a_i(i=1,2\cdots\cdots m)$ 和 $b_j(j=1,2\cdots\cdots n)$，为求解方便起见，现将式(4)改写为：

$$Y(S)(b_1S+b_2S^2+\cdots\cdots+b_nS^n)-(a_1S+a_2S^2+\cdots\cdots+a_mS^m)=a_0-b_0Y(S) \quad (9)$$

若我们对 S 分别选取 $m+n$ 个互不相同的非零数值 $S_1,S_2\cdots\cdots S_{m+n}$，并且对拉普拉斯变换式

$$Y(S)=\int_0^\infty e^{-st}y(t)\mathrm{d}t \quad (10)$$

进行数值积分，则可以得到 $m+n$ 个 $Y(S)$ 值，即 $Y(S_1)$、$Y(S_2)$、$\cdots\cdots Y(S_{m+n})$。于是，由式(9)可以得到一个关于待定系数 $a_i(i=1,2\cdots\cdots m)$ 和 $b_j(j=1,2\cdots\cdots n)$ 的 $m+n$ 元的线性代数方程组：

$$Y(S_k)\sum_{j=1}^{n}S_k^jb_j-\sum_{i=1}^{m}S_k^ia_i=a_0-b_0Y(S_k)$$
$$(k=1,2,\cdots\cdots m+n) \quad (11)$$

通过对此线性代数方程组的数值求解，即可以得到 $m+n$ 个待定系数：$a_i(i=1,2\cdots\cdots m)$ 和 $b_j(j=1,2\cdots\cdots n)$，将它代入公式(4)中即可以得到 $Y(S)$ 的表示式。再用同样的方法可以得到 $X(S)$ 的表示式，然后将 $X(S)$ 与 $Y(S)$ 代入式(3)中，就可以得到传递函数 $W(S)$ 的表示式。

4　数值计算方法

由于在对拉普拉斯变换式(10)进行数值积分时，要涉及到时间积分限为无穷大的问题，而实测响应曲线只能给出有限时间段 $[0,t_*]$ 之间的数值，其中 t_* 为实测响应曲线的最后一点的时间坐标，因此，还需要解决时间由 t_* 到 ∞ 的积分值的问题，以下分两种情况来讨论。

4.1　在 $t\to\infty$ 时，实测响应曲线 $y(t)$ 趋向于某一个极限值 y_∞，这种情况的实测响应曲线的最后一点的 y 值 y_* 就取为极限值 y_∞，并且将时间由 t_* 到无穷大时的函数值全部取为 y_∞(即 y_* 值)，于是可得：

$$\begin{aligned}Y(S)&=\int_0^\infty y(t)e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{t_*}y(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_{t_*}^\infty y(t)e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{t_*}y(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\frac{y_\infty}{S}e^{-st_*}\end{aligned}\tag{12}$$

上式中，最后一个等号右边的第一项的积分式可以利用数值积分方法进行计算，第二项在 $S\neq0$ 时很容易计算，而在 $S=0$ 时还要分两种情况进行讨论：

(1) 若 $y_\infty=y_*=0$，则当 $t>t_*$ 时，$y(t)$ 全部取为 0，这时式(12)中的后一个积分值为零，于是可得

$$b_0=\frac{1}{Y(0)}=\frac{1}{\int_0^{t_*}y(t)\mathrm{d}t}\tag{13}$$

(2) 若 $y_\infty=y_*\neq0$，则由式(12)可知 $Y(0)=\infty$，代入(8)式即可得：$b_0=0$。另外，根据拉普拉斯变换性质

$$\begin{aligned}y(\infty)&=\lim_{s\to0}SY(S)\\&=\lim_{s\to0}\frac{S(1+a_1S+\cdots\cdots+a_mS^m)}{b_1S+\cdots\cdots+b_nS^n}\\&=\frac{1}{b_1}\end{aligned}\tag{14}$$

因此可得：

$$b_1=\frac{1}{y(\infty)}=\frac{1}{y_\infty}=\frac{1}{y_*}\tag{15}$$

这样，不仅使方程(11)减少一个未知数，而且也有利于提高计算精度。

4.2　在 $t\to\infty$ 时，实测响应曲线 $y(t)$ 呈现出趋向于无穷大的趋势，这种情况在实际工程问题中并不多见。如果出现这种情况，则将实测响应曲线的最后两点 (t_{*-1},y_{*-1}) 与 (t_*,y_*) 的连线的延长线作为 $t>t_*$ 时的响应曲线，即其函数形式为：

$$y(t)=y_*+k_*(t-t_*)\quad(\text{当 } t>t_* \text{ 时})\tag{16}$$

其中 k_* 为最后两点连线的斜率，即

$$k_*=\frac{y_*-y_{*-1}}{t_*-t_{*-1}}\tag{17}$$

于是公式(12)中的后一个积分式可以写为

$$\int_{t_*}^\infty y(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{t_*}^\infty y_*e^{-st}\mathrm{d}t+k_*\int_{t_*}^\infty(t-t_*)e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{e^{-st_*}}{S}\left(y_*+\frac{k_*}{S}\right)\tag{18}$$

当 $S=0$ 时，显然此积分值为无穷大，由式(12)可知 $Y(0)=\infty$，并由公式(8)可得 $b_0=0$。再利用公式(14)可得：

$$b_1=\frac{1}{y(\infty)}=0\tag{19}$$

5　算例与讨论

为了说明本文所述方法的精确程度，作者曾选择某些可以通过理论推导得到精确解的典型算例进行数值计算，将这些计算结果与精确解进行比较后发现本方法具有很高的精度。本文限于篇幅仅举一个算例进行讨论。

设系统的动态响应曲线为：

$$y(t)=1-0.5e^{-t} \tag{20}$$

通过严格的理论推导，可以得到其拉普拉斯变换式为：

$$Y(S)=\int_0^\infty(1-0.5e^{-t})e^{-st}dt=\frac{1+0.5S}{S+S^2} \tag{21}$$

由此可见，$Y(S)$ 中各系数的精确解为：$a_0=1, a_1=0.5, a_2=a_3=\cdots\cdots=0, b_0=0, b_1=1, b_2=1, b_3=b_4=\cdots\cdots=0$。现在再利用本文所述的理论分析与数值计算相结合的方法来计算 $Y(S)$ 中的各系数。先用理论分析方法来确定某些系数值，由于 $Y(0)=\infty$，$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=1$，利用本文方法立即可得 $a_0=1$，$b_0=0, b_1=\frac{1}{y(\infty)}=1$。这三个系数值与精确解完全一致，然后再用数值计算方法来求解其余系数值，本例采用梯形积分方法，取时间间距为 $\triangle t=0.05$，数值计算情况如下：

5.1 根据精确解(21)，显然应取 $m=1, n=2$，则计算结果为 $a_0=1, a_1=0.5001, b_0=0, b_1=1, b_2=1.0001$，与精确解相比其误差很小。

5.2 如果 m 值取得偏大些，则计算结果将会怎样呢？当 $m=2, n=2$ 时，计算结果为 $a_0=1, a_1=0.4998, a_2=0.0000, b_0=0, b_1=1, b_2=0.9998$；当 $m=4, n=2$ 时，计算结果为 $a_0=1, a_1=0.4998, a_2=0.0000, a_3=-0.0000, a_4=0.0000, b_0=0, b_1=1, b_2=0.9997$。由此可见，当 m 值取得偏大时，计算误差会略有增大。下面再看，当 n 值取得偏大些情况：当 $m=1, n=3$ 时，计算结果为 $a_0=1, a_1=0.4997, b_0=0, b_1=1, b_2=0.9997, b_3=-0.0001$；当 $m=1, n=5$ 时，计算结果为 $a_0=1, a_1=0.4997, b_0=0, b_1=1, b_2=0.9996, b_3=-0.0001, b_4=0.0000, b_5=0.0000$。由此可见，当 n 值取得偏大时，计算误差也会略有增大。通过上述计算结果的分析可知，当 m 或 n 取值偏大时，虽然会使计算误差略有增大，但对最终的计算结果的影响并不大，在工程要求的精度范围之内，可以认为其计算结果还是基本正确的。

5.3 如果 m 值取得偏小些，显然会由于失掉某些必要的项而使计算结果产生很大的误差，比如当 $m=0, n=2$ 时，计算结果为 $a_0=1, b_0=0, b_1=1, b_2=0.3333$，与精确解相比其误差显然很大，因为当取 $m=0$ 时，决定了 $a_1=0$，与精确解 $a_1=0.5$ 相差甚远。

如果采用泰勒展开方法，可将精确解式(21)改写为：

$$\begin{aligned}Y(S)=1/(&S+0.5S^2-0.25S^3+0.125S^4\\&-0.0625S^5+0.03125S^6\\&-0.15625S^7+\cdots\cdots)\end{aligned}$$

通过数值计算发现，当 $m=0$ 时，随着 n 值的增大，计算结果会趋近于精确解。比如当 $n=4$ 时，计算结果为 $b_0=0, b_1=1, b_2=0.450\,0, b_3=0.133\,3, b_4=0.016\,7$；当 $n=8$ 时，计算结果为 $b_0=0, b_1=1, b_2=0.486\,3, b_3=-0.207\,4, b_4=0.067\,6, b_5=-0.0151, b_6=0.002\,12, b_7=-0.000\,167, b_8=0.000\,006$。

5.4 通过算例计算发现，本方法简单方便，而且计算精度很高，尤其是先用理论分析方法确定的系数 a_0, b_0 与 b_1 值与精确解完全一致，这样更有利于提高精度，这就是本文采用的理论分析与数值计算相结合的方法的优点。

参考文献

1 章臣樾. 锅炉动态特性及其数值模型. 水利电力出版社, 1987 年

2 倪维斗. 徐基豫. 自动调节原理与透平机械自动调节. 机械工业出版社. 1981 年

3 李光泉. 自动控制原理. 机械工业出版社, 1989 年

4 陈金娥. 两种典型响应曲线及其应用. 上海电力学院学报. 1991(1)

由实测响应曲线值求解传递函数＝The Solution of a Transfer Function Through the Use of Measured Response Curve Values〔刊,中〕/ Chen Jin' e(Shanghai Electrical Power Engineering Institute) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. -1995,10(4).-193～196

Based on the measured input signal curves and output response curves of a system the author has through the combination of theoretical analysis and numerical computations solved the system transfer function . The calculation results of a specific example show that the proposed method features a relatively high precision. Key words: transfer function, response curve, automatic control, numerical computation

大功率汽轮机快速冷却时汽缸壁温度的计算方法＝A Method for Calculating the Casing wall Temperature of a High-capacity Steam Turbine During its Intensified Cooling [刊,中]/Tong Enchao (Northern China Electrical Power Engineering Institute //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. -1995,10(4). -197～200

This paper describes a method for the calculation of casing wall temperature of a steam turbine in the course of its fast cooling. With the casing being viewed as a cylinder and its equivalent thickness calculated a heat transfer differential equation is given based on the different heat transfer conditions of the inner and outer cylinder of the two-layer casing. The results of the solution have been found to be in relatively good agreement with the measured results. The proposed method can be used to calculate the variation of casing temperature during an intensified cooling following a turbine shut-down. Key words: steam turbine, casing,cooling,wall temperature calculation method

喇二热电站两台燃气轮发电机组两起事故分析＝The Analysis of Two Failure Cases of Two Gas Turbine Generating Sets for Laer Thermal Power Station [刊,中]/Zhang Jiongwei, Jiang Xiao, Ma Lishan(Laer Gas Turbine Pewer Plant of Daqing Electric Power Supply Co) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. -1995, 10(4).-201～205. Key words: gas turbine, failure analusis

蒸汽喷射式热泵力能效益分析与评价准则＝The Power/energy Cost Effectiveness Analysis and Evaluation Criteria for Steam Jet Heat Pumps [刊,中]/Wang Quan, Ding Xuchang, Liu Lizheng (Northern China Polytechnical University) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. -1995, 10(4). -206～209

A comprehensive analysis is made of the thermotechnical characteristics of a steam jet heat pump, which are compared with the thermal process of motor-driven and steam-driven heat pumps. Presented in this paper are the evaluation criteira of power/energy cost effectiveness analysis for steam jet heat pumps, motor-driven and steam-driven heat pumps. All this constitutes a beneficial exploratory study aimed at achieving a better and more rational selection of thermal compression heat pumps. Key words: steam jet heat pump, thermal analusis, exergy efficiency, cost effectiveness evalution

新型钝体稳燃器的空气动力场的试验研究＝An Experimental Study of the Aerodynamic Field of a Novel Bluff Body Combustion Stabilization Device [刊,中]/Yang Liyu, et al. (xi' an Jiaotong University) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. -1995, 10(4). -210～215

It is well-known that the return-flow region at the rear of a bluff body plays a beneficial role in stabilizing combustion. With respect to the new type saw-toothed bluff body proposed in this paper a detailed experimental study has been undertaken of its aerodynamic field with the study results being analysed. The results of experiments show that the novel saw-toothed bluff body is more effective in achieving combustion stabilization than a conventional saw-toothed bluff body and thereby provides a