

谐振子系统量子卡诺热泵的最佳特性参数

吴 锋 孙丰瑞 陈林根
(海军工程学院)

摘要 研究了量子卡诺热泵的最优性能,导出了量子热泵最佳泵热率 C_0 与致热系数 J 的关系,得到了以 C_m 和 E 为目标的最佳特性参数。

关键词 谐振子 量子热泵 最优性能

分类号 TK123

主要符号

\hat{x} : 量子系统的力学量算子(或称算符);
 $\langle \rangle$: 表示系统力学量的平均值,即量子平均和统计系综平均;
 $[,]$: 量子泊松括号;
 $\hat{\rho}$: 系统的密度矩阵, $\hat{\rho}_B$ 表示热库 B 的密度矩阵;
 T : 求迹符号, T_B 表示对 B 中算子求迹

曾探讨过绝热时间对卡诺热泵最优性能的影响,并得到了一些有意义的结果^[5]。但是,在上述工作中,研究的对象均为经典热力系统,没有考虑热泵工质的量子性质。本文基于现代非平衡量子统计理论和有限时间热力学,分别以泵热率 C 和生态学函数 E ^[6] 为目标,研究了谐振子系统量子卡诺热泵的最优性能,并对两类优化结果进行了比较。本文在量子计算中,取 $\hbar = h/2\pi = 1$ (h 为普朗克常数)。

0 引言

1977年,比利时科学家 I. Prigogine 教授由于在非平衡统计理论方面的杰出贡献而荣获诺贝尔物理学奖。近 20 年来,由于快速高精度微观实验技术的出现以及基于量子统计力学基础上的计算机模拟技术的发展,现代非平衡统计在量子流体、随机系统、临界现象、热力开放系统等方面的理论和应用研究都取得了许多令人瞩目的成就,正日益广泛地渗透到激光物理学、化学反应动力学、生物学、人口动力学以及热能工程等学科领域。80 年代以来, R. Kosloff 和 E. Geva 等人成功地将近半群公式应用到发动机的热力循环分析之中^[1,2],证明了非平衡量子统计理论对于量子热力装置的实用价值。与此同时,作为现代热力学重要分支之一的有限时间热力学,其发展也是日新月异。近年来,已有不少文献论述了卡诺热泵的有限时间热力学性能优化问题^[3,4]。笔者也

1 量子卡诺热泵

热泵工质由无相互作用的谐振子组成,其占有数(粒子数)满足玻色——爱因斯坦分布^[7]:

$$n = 1/(e^{U_k} - 1) \quad (1)$$

其中 k 为振子圆频率, $T = 1/U$ 为工质内部温度。热泵工作于温度分别为 T_h 和 T_c 的高、低温热源之间,工质经历内可逆卡诺逆向循环^[5]。在等温放、吸热过程中,由于热阻的影响,工质温度分别为 T_1 和 T_2 。令 $U_i = 1/T_i$ ($i = 1, 2, h, c$), 由热力学第二定律,有 $U_2 > U_1 > U_h > U_c$ 。

设 \hat{a}^\dagger 、 \hat{a} 分别为谐振子粒子数产生和湮灭算子 ($[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$); $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 为粒子数算子,则工质系统 S 的哈密顿量可以写为^[2]:

$$\hat{H}_S = k\hat{N} = k\hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2)$$

在等温过程中,工质 S 与热库 B 相耦联,总体系 $\oplus B$ 的哈密顿和刘维算子分别为^[8]:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{H}_{SB} \quad (3)$$

$$\hat{L} = \hat{L}_S + \hat{L}_B + \hat{L}_{SB} \quad (4)$$

其中 \hat{L}_{SB} 和 \hat{H}_{SB} 反映了工质 S 与热库 B 之间的耦联作用。

在绝热过程中,工质与热库无耦联。算子 \hat{N} 的海森堡运动方程可写为:

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = i\hat{L}_S\hat{N} = i[\hat{H}_S, \hat{N}]$$

上式仅对绝热过程成立。令 $n = \langle \hat{N} \rangle$ 为粒子数(占有数)的统计平均值,将式(2)代入上式,有:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d\langle \hat{N} \rangle}{dt} = i\langle [\hat{k}\hat{N}, \hat{N}] \rangle = 0$$

即在两绝热过程中,振子的粒子数守恒。分别设为 n_1 和 $n_2 (n_1 > n_2 > 0)$ 。考虑有限速率过程的影响,设绝热过程工质内部温度随时间按匀变率变化^[5]:

$$\frac{d(U^{-1})}{dt} = \frac{dT}{dt} = \pm 1/k \quad (5)$$

式中 $k > 0$, 为绝热时间系数;“+”、“-”分别对应绝热压缩和绝热膨胀过程。在 (n, k) 平面,热泵的热力循环如图 1 所示。图中 1'-2'-3'-4'-1' 对应可逆循环, 1-2-3-4-1 对应内可逆循环。

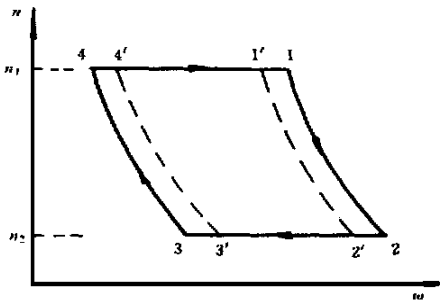


图 1 量子热泵热力循环图

2 循环周期

在等温过程中,工质由于与热库相耦联而成为开放系统。由开放系统广义 master 方程,直接进入海森堡表象,可得系统力学量 \hat{x} 的运动方程为^[8]:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = i\hat{L}_f\hat{x} - \sum_{jk} \{k_{kj}[\hat{x}, \hat{Q}_k]\hat{Q}_j - k_{jk}\hat{Q}_j[\hat{x}, \hat{Q}_k]\} \quad (6)$$

式中 k_{kj} 和 k_{jk} 是与热库 B 密度矩阵矩阵元有关的常数, \hat{Q}_j, \hat{Q}_k 是工质 S 中的算子。而

$$\hat{L}_f = \hat{L}_s + T_{rB}\hat{L}_{sB}\hat{Q}_B$$

其中 T_{rB} 表示对 B 中算子求迹, \hat{Q}_B 为热库 B 的密度矩阵。设热库很大,内部弛豫很强,故可忽略工质对热库的扰动,则有: $T_{rB}\hat{L}_{sB}\hat{Q}_B = 0$ 这样,对算子 \hat{N} , 就有: $L_f\hat{N} = (\hat{L}_S + T_{rB}\hat{L}_{sB}\hat{Q}_B)\hat{N} = \hat{L}_S\hat{N} = [\hat{H}_S, \hat{N}] = 0$

(7)

在式(6)中,取 $\hat{x} = \hat{N}, \hat{Q}_1 = \hat{a}^\dagger, \hat{Q}_2 = \hat{a}$, 由 \hat{a}^\dagger 与 \hat{a} 的对易关系并注意到式(7),通过分析计算可得:

$$\dot{n} = \frac{d\langle \hat{N} \rangle}{dt} = -ae^{qU}k[(e^{U_jk} - 1)n - 1] \quad (8)$$

式中 α, q 均为常数, $T_j = 1/U_j (j = h, c)$ 为热库温度。

将式(1)代入式(7),在经典极限 ($Uk \ll 1, n \gg 1$) 下取二级近似,可得等温过程 1-2 和 3-4 的历经时间分别为:

$$t_1 = \int_{k_1}^{k_2} \left(\frac{dn}{dk} / \dot{n} \right) dk \approx A / (T_h - 1) \quad (9)$$

$$t_2 \approx A / (1 - T_c) \quad (10)$$

其中 $\alpha_h \equiv U_h / U_c, \alpha_c \equiv U_c / U_h, A = (n_1 - n_2) / \alpha > 0$ 为常数。

由式(5)积分,可得绝热时间 t_3 和 t_4 为:

$$t_3 = t_4 = k(T_h U_h^{-1} - T_c U_c^{-1}) \quad (11)$$

联立式(9)~(11),可得热泵循环周期 $f = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ 为:

$$f = 4A T_h \left[\frac{1-y}{4(1-\frac{y}{T_h})(\frac{1}{T_h}-1)} + \lambda(U_h^{-1} - U_c^{-1}y) \right] \quad (12)$$

式中 $y = T_c / T_h, \lambda = k / 2A$ 。

3 最佳泵热率 C_0 与致热系数 j

由式(2)很易得到工质系统的能量变化为:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d\langle H_s \rangle}{dt} = \dot{k}_n + \dot{k}_n$$

上式与热力学第一定律微分形式比较,可得瞬时功率和热流分别为:

$$\dot{W} = -\dot{k}_n \quad (13)$$

$$\dot{Q} = \dot{k}_n \quad (14)$$

将式(1)代入式(14)并取一级近似,我们得到工质在两等温过程放出和吸收的热量分别为:

$$Q_1 = - \int_{n_1}^{n_2} k dn \approx B T_h U_h \quad (15)$$

$$Q_2 = B T_c U_c \quad (16)$$

其中 $B = \ln \frac{n_1}{n_2}$ 为常数

联立式 (12)、(15)、(16), 可得泵热率 C 、循环熵产率 e 以及致热系数 j 分别为:

$$C = \frac{Q_1}{T} = - \left[\frac{1-y}{4(T_h-1)(T_h y)} + \lambda(U_h^{-1} - U_c^{-1} y) \right] T^{-1} \quad (17)$$

$$e = (Q_1 U_h - Q_2 U_c) / f = - U_h (1-y) \left[\frac{1-y}{4(T_h-1)(1-T_h y)} + \lambda(U_h^{-1} - U_c^{-1} y) \right] T^{-1} \quad (18)$$

$$j = Q_1 / (Q_1 - Q_2) = (1 - U_h U_c^{-1} y)^{-1} < j_c \quad (19)$$

其中 $j_c = B / 4A U_h$, $j_c = (1 - U_h U_c^{-1})^{-1}$ 为卡诺致热系数。由式 (19) 可知, 给定 j 相当于给定 y 。对式 (17) 利用极值条件 $(\frac{\partial C}{\partial T_h})_y = (\frac{\partial C}{\partial T_h})_j = 0$, 可得给定致热系数 j 时的最佳泵热率:

$$C_0 = - \left[\frac{U_c(1-j^{-1})}{U_h - U_c(1-j^{-1})} + \lambda U_h^{-1} j^{-1} \right] T^{-1} \quad (20)$$

上式即为 C 与 J 之间的优化关系。与 C_0 对应的极值点为:

$$T_{h0} = (1+y) / 2y \quad (21)$$

在式 (20) 中, 令 $\frac{dC_0}{dJ} = 0$, 可得最大泵热率:

$$C_m = - \left[\lambda U_h^{-1} - (1 - \frac{\lambda U_c}{\lambda U_h})^2 \right] T^{-1} \quad (22)$$

与 C_m 对应的致热系数为:

$$J_m = U_c [U_c - U_h + U_h \frac{U_c}{U_h} \lambda]^{-1} \quad (23)$$

4 E 目标最大时的最佳特性参数

由式 (17)、(18) 可知, 当 j 给定时, C 与循环熵产率 e 成正比。为了较经济的利用能源, 有必要考虑 C 和 e 之间的最佳折衷。这种考虑类似于生命体的整体 (或长期) 目标, 故称为生态学优化。由于 j_{σ} / U_c 反映了泵热率的耗散^[9], 故建立目标函数:

$$E = C - J_c e / U_c = - \left[1 - \frac{U_h(1-y)}{U_c(1-y)} \right] \times \left\{ (1-y) / [4(T_h-1)(1-T_h y)] + \lambda(U_h^{-1} - U_c^{-1} y) \right\} T^{-1} \quad (24)$$

可以证明, 二元函数 $E(T_h, y)$ 有极大值。由条件

$$\frac{\partial E}{\partial T_h} = 0, \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \text{ 得与 } E \text{ 的极大值 } E_m \text{ 对应的极值点:}$$

$$T_{hE} = [(1+y) / 2y] E \\ = \frac{1}{2} (1 + \frac{b^2 + c - b}{b^2 + c - b}) (\frac{b^2 + c - b}{b^2 + c - b})^{-1} \quad (25)$$

$$y_E = \frac{b^2 + c - b}{b^2 + c - b} \quad (26)$$

其中 $b = 2\lambda(U_c - U_h)(U_h U_c + 2U_h - 2U_c)^{-1}$

$$c = [2\lambda(U_c - U_h) + U_c(2U_h - U_c)](U_h U_c + 2U_h - 2U_c)^{-1}$$

将式 (25)、(26) 代入 (17)、(19) 中, 可知在生态学目标 E 最大时, 量子热泵的最佳泵热率和致热系数分别为:

$$C_E = - [y_E / (1-y_E) + \lambda(U_h^{-1} - U_c^{-1} y_E)] T^{-1} \quad (27)$$

$$j_E = (1 - U_h U_c^{-1} y_E)^{-1} \quad (28)$$

式中 y_E 由式 (26) 决定。

5 讨论

5.1 绝热时间的影响: (20)、(22)、(23)、(27)、(28) 等式中的 λ 反映了绝热时间对热泵性能的影响。我们指出, 这种影响是不能忽略的。因为当 λ 为 0 (即 $k = 0$) 时, 由式 (5) 绝热温度变化率 $\frac{dT}{dt} = \frac{d(1/U)}{dt} \rightarrow \infty$, 这显然是不合理的。在实际热泵的设计中, 我们应当选用量子性质较好的工质, 以增大常数 A , 减小绝热时间, 提高泵热率。

5.2 两种目标优化结果的比较: 由式 (21)、(25) 可知, 当 j (即 y) 给定时, 以 C 为目标的式 (17) 和以 E 为目标的式 (24) 有相同的极值点 $\alpha_{10} = \alpha_{1E}$ 。这说明优化关系式 (20) 对两种目标都是成立的。但以 C_m 为目标的优化结果式 (22)、(23) 和以 E 为目标的优化结果式 (27)、(28) 有明显差别。经过冗长而又乏味的数学计算, 可以证明 $j_E > j_m$ 以及 $C_E < C_m$ 。这是我们预期的结果, 说明 E 目标优化的热泵能源利用较为经济合理, 但 C_m 目标优化给出了热泵泵热率的上限。

5.3 与经典热泵的比较: 将式 (20) 与文献 [5] 的式 (13) 比较, 可知量子热泵 C_0 与 j 的优化关系与经典热泵差异较大。这种差异反映了量子工质与经典工质的不同性质。由式 (1)、(18)、(14) 知, 在经典极限下取一级近似, 可得等温过程中的热流为

$$\dot{Q}_1 = 2ak(1 + qU_h k)(U_h - U_1) / U_1 \quad (29)$$

$$\dot{Q}_2 = 2ak(1 + qU_c k)(U_2 - U_c) / U_2 \quad (30)$$

将上述两式与文献 [4] 中的式 (1)、(2) 比较, 可知量子热力装置所遵循的导热规律是不能用经典导热规律

来表述的。

6 结论

综上所述,本文根据现代非平衡量子理论和有限时间热力学所得到的优化关系式(20)、(22)、(23)、(27)和(28)等,可以作为热泵的有限时间热力学量子性能界限。这些关系式对于以量子流体(如氢、氦)等为工质的卡诺热泵的论证和设计,具有一定的实际指导意义。

参 考 文 献

1. Kosloff RA. quantum mechanical open system as a model of a heat engine. J Chem. Phys., 1984, 80(4): 1625-1630

2. Geva E, Kosloff R. On the classical limit of quantum thermodynamics in finite. J. Chem. Phys., 1992, 97(6): 4398-4412
3. 陈文振,孙丰瑞,陈林根.两源制冷和泵热循环参数选择的有限时间热力学准则.科学通报,1990,35(11): 869-870
4. 严子浚.热阻对热泵性能的影响.新能源,1987(6): 42~46
5. 吴锋,胡亚联.卡诺热泵的最佳泵热率.科技通报,1992,8(5): 282-285
6. 陈林根,孙丰瑞.卡诺制冷机的生态学优化准则.自然杂志,1992,15(8): 633
7. 帕斯里亚.统计力学(上).北京:高教出版社,1985: 252
8. 霍裕平.非平衡态统计理论.科学出版社,1987: 223-252
9. 陈林根,孙丰瑞,陈文振.热力循环的生态学品质因素.热能动力工程,1994,9(6): 374-376

作者简介:吴锋,男,1955年生。武汉化工学院物理教研室副教授,现在海军工程学院读博士研究生。主要从事工程热力学和非平衡统计理论方面的研究工作,已公开发表论文40多篇。

(通讯处 430073 武汉化工学院物理教研室)

燃机叶片内疲劳裂纹发展的规律性

“Проблема Машиностроения и Надёжность Машии” 1996年5月号报导在线性破坏力学范畴内,叙说了压气机叶片内疲劳裂纹的发展过程。通过试验确定并证实,发展过程中裂纹的结构趋向稳定的形式,该形式不取决于原始形式和载荷。

得到了叶片寿命取决于原始裂纹尺寸和载荷的关系。所得到的结果可用于从叶片的强度和可靠性观点出发来评估设计和技术途径的效果。

(思娟 供稿)

未来最有前途的燃煤技术

“Энергетик” 1996年9月号叙说了世界各国利用增压流化床燃烧(PFBC)蒸然联合装置研制的情况。给出了劣质燃料在炉膛沸腾层内燃烧的方案、技术特性。完成了对第一代PFBC锅炉的改进工作。超洁净和超高效装置计划于2008年后投入商业运行。

认为这种技术对于燃煤电站是最有前途的。首先,应该在开采劣质便宜燃料的煤矿附近,包括那些环保问题最突出的地区合理地应用PFBC技术。

(思娟 供稿)

船用大功率自动同步离合器试验 = **Experimental Design of High-power Automatic Synchronizing Clutches for Ships** [刊, 中] / Wei Junbo (Harbin No. 703 Research Institute) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1997, 12(5). - 351~ 353

On a high-power automatic synchronizing clutch test rig developed by the No. 703 Institute and by the use of a computer-based data acquisition system a series of tests involving the engagement/disengagement of a clutch under no-load conditions were completed, thereby providing test facilities and methods for carrying out an in-depth study of dynamic characteristics of marine high-power automatic synchronizing clutches. **Key words** automatic synchronization, clutch, test rig, test and measurement

焦炭热部分气化燃煤联合循环系统性能分析 = **Performance Analysis of a Coke Carried Heat Partial Gasification Coal-fired Combined Cycle** [刊, 中] / Xu Xiangdong, Zhao Li (Tsinghua University) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1997, 12(5). - 354~ 357

Heat carried partial gasification combined cycle pertains to a novel coal-fired combined cycle-based electrical power generation technology developed by the Thermal Energy Department of Tsinghua University. As a result of continuous study over the years and the operating experience accumulated therein the said technology has seen significant improvement. Recently, as an improved version of the system, coke carried heat partial gasification combined cycle has been proposed and the coke carried heat boiler and gasification boiler have already been built at the Tsinghua Power Station with a cold-state commissioning test performed. On the basis of the heat carried cycle and by changing gas components and other parameters an analysis is conducted of the coke carried heat system, which enables the authors to make the conclusion that the gas quality and flow rate play a key role in ensuring the high performance of the combined cycle system as a whole. **Key words** heat carried gasification, coke carried heat partial gasification, performance calculation

舰船锅炉总体方案的经济性和重量尺寸指标分析 = **An Analysis of the Economic Aspect and Weight-dimension Index for a Naval Boiler Comprehensive Scheme** [刊, 中] / Chen Qiduo, Liu Changhe, et al (Harbin No. 703 Research Institute) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1997, 12(5). - 358~ 360

Key words naval boiler, economic aspect, weight and dimensions

谐振子系统量子卡诺热泵的最佳特性参数 = **Optimal Performance Parameters of a Harmonic Oscillation Quantum Carnot Heat Pump** [刊, 中] / Wu Feng, Sun Fengrui, Chen Lingen (Naval Engineering Academy) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1997, 12(5). - 361~ 364

The optimum performance of a quantum heat pump is studied. Derived is the relationship between the quantum heat pump optimum pump heat rate π_0 and pyrogenicity ψ . Also obtained are the optimum performance parameters with π_m and E serving as objectives. **Key words** harmonic oscillation, quantum heat pump, optimum performance

高炉煤气集输系统计算机仿真 = **Computer Simulation of Blast-furnace Gas Gathering and Transportation System** [刊, 中] / Lin Feng, Han Hongjia (Harbin No. 703 Research Institute) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1997, 12(5). - 365~ 368

With respect to the blast-furnace gas gathering and transportation system of an iron and steel works a computer-based mathematical simulation technology is used based on the selection of schemes to forecast the system operating conditions after its commissioning and the specific features of pressure and flow rate employed by various end-users. Through a theoretical justification of the feasibility and reliability of the selected