

四边对流换热的内含热源各向异性矩形域稳态热传导解析

(海军工程学院) 张承宗 王安稳

[摘要] 应用复级数方法给出的含热源各向异性矩形域稳态热传导解析解,结合引入板角热流角点条件,首次解析分析了四边与流体换热的含热源各向异性矩形域温度场。讨论了铺设角、各向异性程度、边界对流换热系数及跨宽比对温度场分布的影响。

关键词 各向异性稳态热传导 对流 矩形域 解析解 角点条件 热源

中图分类号 TK124

1 前言

本世纪以来,以复合材料、晶体材料为代表的各向异性材料在诸多工程中获得广泛的应用,各向异性热传导研究有重要的理论及工程意义。

由于各向异性热传导控制方程中出现温度对于空间坐标的奇次交叉偏导数,原先求解各向同性热传导的分离变量法失效,解析求解一度为不可能,以至有限域的各向异性热传导解析研究这一重要领域却成果很少。本文应用参考文献〔1〕和〔2〕提出的复级数法给出了矩形域各向异性稳态热传导的解析解,在对板角的能量平衡分析提出温度场的角点条件,计算了四边与流体对流换热内含均匀热源的矩形域内温度场,并结合有关参数进行了分析讨论。

2 理论部分

考虑无限长矩形柱,柱矩形横截面长为 a ,宽为 b ,矩形柱在四个边界上与具有均恒温度 T_s 的环境对流换热,换热系数为 h_1 。

各向异性温度场控制方程为

$$k_{11} \frac{\partial T^*}{\partial x^2} + 2k_{12} \frac{\partial T^*}{\partial a \partial Z} + k_{22} \frac{\partial T^*}{\partial Z^2} + G = 0 \quad (1)$$

式中 k_{ij} ($i = 1, 2 \quad j = 1, 2$) 为面内热传导系数,具体形式如下

$$k_{11} = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \quad k_{12} = (k_1 - k_2) \sin \theta \cos \theta$$

$k_{22} = k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta$, 其中 k_1, k_2 为主轴方向的热传导系数, θ 为各向异性角, g 为热源函数

式(1)中引入如下无量纲量

$$a = \frac{x}{a} \quad Z = \frac{y}{b} \quad T = \frac{a}{b} \quad G = \frac{ga^2}{T_s}$$

$$T^* = \frac{T - T_s}{T_s} \quad Bi_1 = \frac{h_1}{k_{11}} a \quad K = \frac{k_{12}}{k_2}$$

边界条件为

$$-\frac{\partial T^*}{\partial a}(0, Z) - \Gamma \frac{k_{12}}{k_{11}} \frac{\partial T^*}{\partial Z}(0, Z) + Bi_1 T^*(0, Z) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial a}(0, Z) + \Gamma \frac{k_{12}}{k_{11}} \frac{\partial T^*}{\partial Z}(1, Z) + Bi_1 T^*(1, Z) = 0 \quad (3)$$

$$-\Gamma \frac{\partial T^*}{\partial Z}(a, 0) - \frac{k_{12}}{k_{22}} \frac{\partial T^*}{\partial a}(a, 0) + Bi_1 \frac{k_{11}}{k_{22}} T^*(a, 0) = 0 \quad (4)$$

$$\Gamma \frac{\partial T^*}{\partial Z}(a, 1) + \frac{k_{12}}{k_{22}} \frac{\partial T^*}{\partial a}(a, 1) + Bi_1 \frac{k_{11}}{k_{12}} T^*(a, 1) = 0 \quad (5)$$

对于四个板角 $(0, 0)$ $(1, 0)$ $(1, 1)$ $(0, 1)$ 微元,相邻的边界均为对流边界,根据能量守恒原理,当 $dx \rightarrow 0 \quad dy \rightarrow 0$ 时,有下式成立:

$$-q_x(0, 0) dy - q_y(0, 0) dx = h_1 (T(0, 0) - T_s) dx + h_1 (T(0, 0) - T_s) dy \quad (6)$$

$$q_x(1, 0) dy - q_y(1, 0) dx = h_1 (T(1, 0) - T_s) dx + h_1 (T(1, 0) - T_s) dy \quad (7)$$

$$q_x(1, 1) dy + q_y(1, 1) dx = h_1 (T(1, 1) - T_s) dx + h_1 (T(1, 1) - T_s) dy \quad (8)$$

$$-q_x(0, 1) dy + q_y(0, 1) dx = h_1 (T(0, 1) - T_s) dx + h_1 (T(0, 1) - T_s) dy \quad (9)$$

因为 dx, dy 均在趋于 0, 我们取 $dx = dy$, 在引入上文定义的无量纲量及热流表达式的基础上,式(6)~(9)可化为如下角点条件式:

$$-(1 + \frac{k_{12}}{k_{22}}) \frac{\partial T^*}{\partial a}(0, 0) - \Gamma (\frac{k_{12}}{k_{11}} + 1) \frac{\partial T^*}{\partial Z}(0, 0) + Bi_1 \times (1 + \frac{k_{11}}{k_{22}}) T^*(0, 0) = 0 \quad (10)$$

$$(1 + \frac{k_{12}}{k_{22}}) \frac{\partial T^*}{\partial a}(1, 1) + \Gamma (\frac{k_{12}}{k_{11}} + 1) \frac{\partial T^*}{\partial Z}(1, 1) +$$

$$Bi_1 (1 + \frac{k_{11}}{k_{22}}) T^*(1, 1) = 0 \quad (11)$$

$$(1 - \frac{k_{12}}{k_{22}}) \frac{\partial T^*}{\partial a}(1, 0) + \Gamma(\frac{k_{12}}{k_{11}} - 1) \frac{\partial T^*}{\partial Z}(1, 0) + Bi_1 \times$$

$$(1 + \frac{k_{11}}{k_{22}}) T^*(1, 0) = 0 \quad (12)$$

$$-(1 - \frac{k_{12}}{k_{22}}) \frac{\partial T^*}{\partial a}(0, 1) - \Gamma(\frac{k_{12}}{k_{11}} - 1) \frac{\partial T^*}{\partial Z}(0, 1) + Bi_1 \times$$

$$(1 + \frac{k_{11}}{k_{22}}) T^*(0, 1) = 0 \quad (13)$$

稳态各向异性热传导问题求解可归结为求解偏微分方程 (1) 在热传导边界条件 (2) ~ (5) 角点条件 (10) ~ (13) 下边值问题

按照文献 [1] 和 [2] 的求解步骤, 可得稳态各向异性热传导问题矩形域边值问题一般解析解:

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} (A_{1m} \frac{\text{sh}m \text{c}_{b1} Z \sin m \text{c}(a_1(1-Z) + 1-a)}{\text{sh}m \text{c}_{b1}} +$$

$$A_{2m} \frac{\text{sh}m \text{c}_{b1} (1-Z) \sin m \text{c}(a_1 Z + a)}{\text{sh}m \text{c}_{b1}} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (B_{1n} \frac{\text{sh}n \text{c}_{d1} a \sin n \text{c}(c_1(1-a) + 1-Z)}{\text{sh}n \text{c}_{d1}} +$$

$$B_{2n} \frac{\text{sh}n \text{c}_{d1} (1-a) \sin n \text{c}(c_1 a + Z)}{\text{sh}n \text{c}_{d1}} + p_1(a_1 Z +$$

$$h_{16} a(1-a)) + p_2((1-a)(1-Z) + h_{16} a(1-a)) + p_3(a(1-Z) - h_{16} a(1-a)) + p_4(Z(1-a) - h_{16} a(1-a)) + T^* \quad (14)$$

上式中 $h_{16} = \frac{k_{12}}{k_{11}} \Gamma, m, n$ 为正整数, $T^* = \frac{G}{4} (\frac{a(1-a)}{k_{11}} + \frac{Z(1-Z)}{k_{22}})$

$a_1 \pm b_1 i$ (i 为虚数单位) 为特征方程 $k_{11} + 2k_{12} \Gamma r + k_{22} \Gamma^2 r^2 = 0$ (15)

的特征根 $r_{1,2}$;

$c_1 \pm d_1 i$ (为虚数单位) 为特征方程 $k_{11} s^2 + 2k_{12} \Gamma s + k_{22} \Gamma^2 = 0$ (16)

的特征根 $s_{1,2}$

在计算中, 设 m, n 最大取 M , 这样解析解 (11) 共有 $4M + 4$ 个未知数. 对于矩形域边值问题, 将解析解代入 4 个边界条件中, 将形成的 4 个方程分别展成 M 项正弦级数, 根据正弦级数的正交性, 可以得到 $4M$ 个线性代数方程. 四个角点条件可建立四个线性方程, 这样总共建立 $4M + 4$ 个线性方程, 可以求解 $4M + 4$ 个未知数, 热传导问题得解

3 数值结果

3.1 数值结果

取 $a = 1m, b = 1m, k_1 = 46.2 W/(m \cdot ^\circ C), k_2 = 0.72 W/(m \cdot ^\circ C), h_1 = 1 W/(m^2 \cdot ^\circ C)$, 计算中取 M

$= 40$, 表 1 2 用以考察方柱温度总体分布情况, 以表 3 考察解的稳定性.

表 1 $\theta = 0^\circ$ 的方柱温度场 T^* 分布

x	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
y	0.0	0.2247	0.2251	0.2257	0.2259	0.2257	0.2251
	0.1	0.2522	0.2527	0.2534	0.2536	0.2534	0.2527
	0.3	0.2873	0.2878	0.2886	0.2888	0.2886	0.2878
	0.5	0.2985	0.2991	0.2999	0.3001	0.2999	0.2991
	0.7	0.2873	0.2878	0.2886	0.2888	0.2886	0.2878
	0.9	0.2522	0.2527	0.2534	0.2536	0.2534	0.2527
	1.0	0.2247	0.2251	0.2257	0.2259	0.2257	0.2251

表 2 $\theta = 45^\circ$ 的方柱温度场 T^* 分布

x	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
y	0.0	0.2914	0.2905	0.2804	0.2600	0.2300	0.1913
	0.1	0.2905	0.2925	0.2877	0.2721	0.2465	0.2118
	0.3	0.2804	0.2877	0.2940	0.2888	0.2727	0.2465
	0.5	0.2599	0.2712	0.2888	0.2945	0.2888	0.2712
	0.7	0.2299	0.2465	0.2727	0.2888	0.2940	0.2887
	0.9	0.1910	0.2118	0.2465	0.2721	0.2877	0.2925
	1.0	0.1687	0.1913	0.2300	0.2600	0.2804	0.2905

表 3 方柱边角 (1, 1) 温度 T^* 随 M 的变化

θ	$M = 8$	$M = 16$	$M = 32$	$M = 40$
45°	0.2946	0.2946	0.2946	0.2946

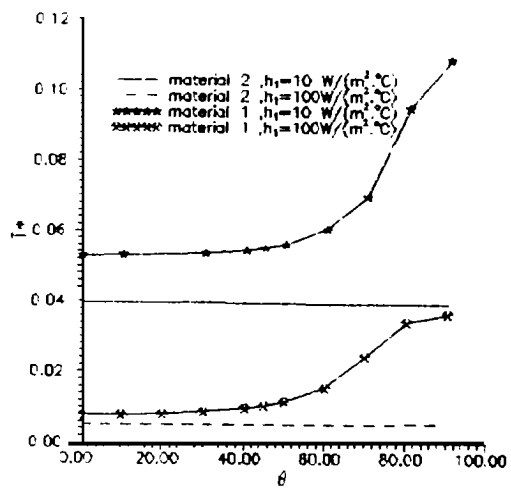


图 1 方形域中心温度与各向异性角的关系曲线

又选择了如下的两种材料进行计算, 第一种材料的热常数: $k_1 = 46.2 W/(m \cdot ^\circ C), k_2 = 0.72 W/(m \cdot ^\circ C)$ 第二种材料的热常数: $k_1 = 300 W/(m \cdot ^\circ C), k_2 = 80 W/(m \cdot ^\circ C)$. 为了分析铺设角, 各向异性, 跨宽比, 边界对流系数对温度场分布的影响, 针对两种不同的边界换热系数 ($h_1 = 10 W/m^2 \cdot ^\circ C$) 和

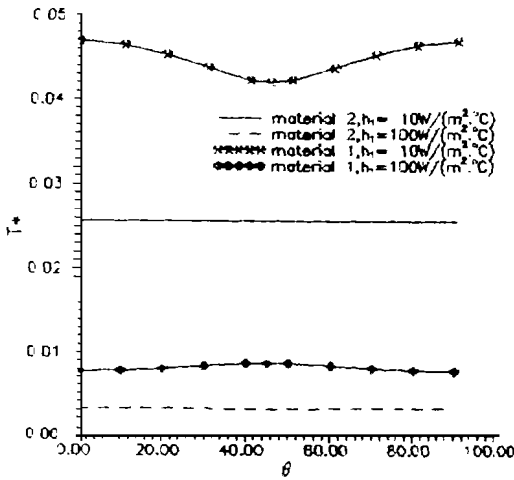


图 2 矩形域中心温度与各向异性角的关系曲线

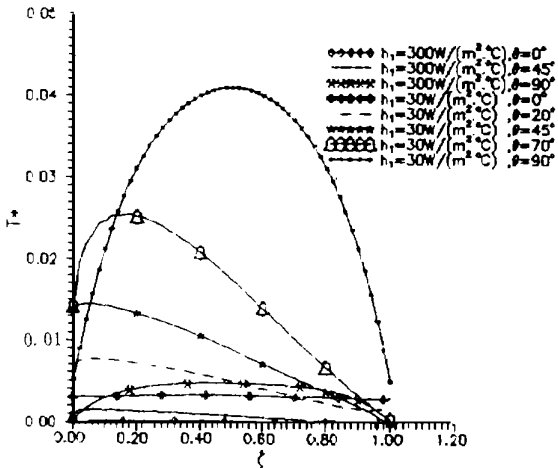


图 3 矩形域边界 ($Z=0,0$) 上温度沿 a 轴的分 布曲线
 $a=1\text{ m}, b=3\text{ m}, k_1=46.2\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{C}), k_2=0.72\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{C})$
 1- $h_1=300\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}), \theta=0^\circ$ 2- $h_1=300\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}), \theta=45^\circ$
 3- $h_1=300\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}), \theta=90^\circ$ 4- $h_1=30\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}), \theta=0^\circ$
 5- $h_1=30\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}), \theta=20^\circ$ 6- $h_1=30\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}), \theta=45^\circ$
 7- $h_1=30\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}), \theta=70^\circ$ 8- $h_1=30\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}), \theta=90^\circ$

$h_1=100\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$), 对于温度场中心值进行计算, 方形域结果绘在图 1, 矩形域的相应结果绘在图 2 同时考察所给第一种材料构成的柱边界 ($Z=0,0$) 上温度随 a 变化的分布, 取 $M=40$, 矩形域 ($a=1\text{ m}, b=3\text{ m}$) 的相应结果绘在图 3

4 分析讨论

(1) 表 1 表明: 对于正交各向异性温度场 ($\theta=0^\circ$), 当热边界、材料满足轴对称条件时, 温度场具有

各同性温度场类似的轴对称性; 对于各向异性热传导, 由于 k_{12} 的存在, 温度分布不存在轴对称性, 但在热源、热边界、材料满足中心对称条件时, 温度场存在中心对称性: $T(a, Z) = T(1-a, 1-Z)$, 从表 2 可发现这一点。

(2) 表 3 表明当 M 增大时, 本文解数值保持稳定; 计算中发现, 一般 M 取 40 即可满足精度要求。

(3) 本文计算边界为柱四边向周围环境对流换热, 板内温度应中间高, 四边低, 表 1 2 也表明这种趋势。从其它计算也发现, 一般在对流边界上温度变化较为剧烈, 横截面中轴上温度变化较为平缓。

(4) 从图 1 2 发现各向异性角 θ 对矩 (方) 形域中心温度有重大影响: 对于本文设定的边界条件及强各向异性材料 (如本文计算时所选的材料 1), 当边界换热系数较高 (本文计算 $h_1=100\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$) 时, θ 从 0° 增加到 45° 时, 方形柱中心温度依次递增, θ 为 45° 即达到最高, θ 从 45° 到 90° 时, 方形柱中心温度对称降低, 但边界换热系数较小 (本文计算 $h_1=100\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$), 则中心温度随 θ 的变化呈现相反的规律: 中间低两头高; 而对于矩形柱 ($a=1\text{ m}, b=3\text{ m}$), θ 从 0° 增加到 90° 时, 矩形柱中心温度逐渐升高, θ 为 90° 达到最高点。

(5) 各向异性、边界对流对温度场中心温度分布的影响是明显的: 从图 1 2 可看出对于弱各向异性材料 (文中所选的材料 2), 中心温度受各向异性角影响并不明显。边界对流系数较低时, 相应中心温度较高, 相反也成立, 而且如 (1) 所述边界换热程度影响中心温度随 θ 的变化规律。

(6) 温度场梯度受各向异性角、边界换热、跨宽比的影响: 从图 3 发现, 对于矩形域, 边界温度梯度在 θ 为 0° 时为最低, 随着 θ 的增大边界梯度也在增加。对于方形域, 边界上温度最大梯度在 θ 为 45° 为最高, θ 从 0° 增加到 45° 过程中, 边界温度梯度依次增大, 边界对流程度较低情况下相应温度梯度也较大。

参考文献

- 1 张承宗, 杨光松. 各向异性板结构横向弯曲一般解析解. 力学学报, 1996, 28(4).
- 2 张承宗. 各向异性稳态渗流复级数解析分析法. 海军工程学院学报, 1996, (1).

(复 编辑)

jiang Industrial University) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power). - 1998, 13(6). - 427 ~ 428

The shortcomings of a straight tube Rijke type pulsating combustor are analysed. Through the use of contraction at two ends successfully realized is the coal pulsating combustion of a Rijke - ZT type pulsating combustor for a combustion chamber with a diameter of 1 meter and length-diameter ratio of 4.5. This leads to the preliminary resolution of the problem of creating a large-sized Rijke type pulsating combustor.

Key words pulsating combustion, Rijke type pulsating combustor, Rijke-ZT model pulsating combustor

煤焦特性及其 N_2O 生成影响因素的实验研究 = **An Experimental Study of Coal Char Properties and Its N_2O Generation Influencing Factors** [刊, 中] / Zeng Dong, Zheng Shouzhong, Cai Song (Southeastern University) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power). - 1998, 13(6). - 429~ 431

The pyrolysis of two kinds of coal and coke combustion test has been conducted on a fluidized bed. Studied is the effect of coal type, particle diameter and pyrolysis conditions on coal char properties and N_2O conversion rate. The results of the study show that with the exception of the particle diameter both the coal type and pyrolysis conditions have a marked effect on N_2O conversion rate of N in the coal char. Key words coal char, nitrous oxide, pyrolysis, combustion

流化床锅炉床下点火装置的设计 = **The Design of an Ignition Device under a Fluidized Bed Boiler Bed** [刊, 中] / Yang Jialin, Chi Yong, Jiang Xuguang, et al (Zhejiang University) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power). - 1998, 13(6). - 432~ 434

The superior advantages of an ignition mode under a fluidized bed boiler bed are listed. Presented are the design method and procedures of a pre-combustion cylindrical ignition device. In connection with practical applications some optimum design schemes have been proposed. Key words ignition device, fluidized bed, boiler start-up, burner, pre-combustion chamber

一种燃气轮机模块化非线性仿真模型 = **A Modularized Non-linear Simulation Model for Gas Turbines** [刊, 中] / Su Ming, Chen Delai, Zhang Yuanwei, et al (Shanghai Jiaotong University) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power). - 1998, 13(6). - 435~ 437

Proposed is a method for setting up a gas turbine modularized simulation model based on typical components and segments or links. This method allows to avoid the iteration in differential equation right function calculation and simplify the simulation calculation flow process, thus enhancing the flexibility and universality of the model. Through tests and measurements it is found that the totally nonlinear simulation model set up with the help of the above-cited method can realize a realtime simulation on a 486 PC. Key words gas turbine, system simulation, modularized modeling

四边对流换热的内含热源各向同性矩形域稳态热传导解析 = **Anisotropic Rectangular Domain Steady-state Heat Conduction Analysis of Four-side Convection Heat Exchange in the Presence of an Internal Heat Source** [刊, 中] / Zhang Chengzong, Wang Anwen (Naval Academy of Engineering) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power). - 1998, 13(6). - 438~ 440

Through an analytic solution of steady-state heat conduction of anisotropic rectangular domain in the pres-