

完全气体一维无粘可压振荡流动的一个解析解

(东南大学) 黄典贵

摘要: 通过研究得到了完全气体一维无粘可压振荡流动的代数显式解析解,这一解析解不但在理论上具有重要意义,还可以作为检验各种数值解法的标准解。这一解析解具有比较广泛的工程背景。

关键词: 流动; 振荡

中图分类号: O 353.1

1 引言

从流体力学的观点看,振荡意味着流体在流动过程中,流动的各种参数值随时间而振荡的物理现象,振荡流的这种物理现象,可以是流体自身固有的,如紊流的脉动现象;也可以是由于外界条件引起的,如鸟类在飞行时翅膀对空气扑击引起空气的振荡等。在振荡流中,简谐振荡是振荡现象中最简单也是最基本的一种振荡,且任何复杂的振荡现象都可以通过简谐振荡的迭加而成。

对振荡流场的研究,是一个很有意义的研究课题。飞机机翼的振动引起周围流场的振荡,而振荡流场反过来会对机翼施加一个振荡作用力,在一定条件下,这一振荡作用力可能会使机翼的振动不断增大导致机翼的不稳定;在压气机、透平或水轮机等机械中,叶片的振动引起周围流场的振荡,而振荡流场反过来又作用于叶片,在一定条件下,这一振荡作用力可能会使叶片的振动不断增大导致叶片的不稳定。总之,在日常生活中,振荡流动随处可见,且振荡流动常常与固体弹性结构耦合在一起,容易导致重大的安全事故。因此,研究振荡流场很有意义。

振荡流体力学问题比起一般的定常流动问题来要复杂得多,而解析解法在振荡流动中更为少见,最早的一个例子被称为 Stoke 流动,它是指一个无穷大平板在静止不可压流体中作与平板面平行的简谐振动时所产生的振荡流场^[1],这一解析解尽管受各种限制,使其不容易找到与其相类似的应用场合,但它毕竟是振荡流体力学中的首例解析解,所以在振荡流体力学中还是很有地位的;再一个例子就是求解不可压流体流经振动平板所产生的非定常气动力的西奥道森方法,它以解析解的方式得到了不可压流体流经振动薄平板上的非定常气动力^[2],要求攻角为零,有一定的工程背景,可作为机翼或叶片等的

简化模型,但它要求无攻角且流体不可压,这在实际应用中也是相当苛刻的。

本文得到的一个解析解当然也是有不少的限制,但它比起前两种解法具有更广的工程背景,如鸟类的翅膀对空气的扑击产生的振荡流场与非定常气动力,机翼的振动产生的振荡流场与非定常气动力,叶片或高层建筑的振动产生的振荡流场与非定常气动力等,下面将作详细介绍。本文的研究旨在为这类工程问题的数值计算提供有效的校验工具。

2 基本方程与解析解

对于理想气体,可以写出如下形式的流体力学方程组:

$$\begin{cases} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} + 5 \cdot (\vec{d}V) = 0 \\ \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} + \vec{V} \cdot 5 \vec{V} + \frac{5P}{d} = 0 \\ \frac{p}{d} = \text{Const} \\ p = dRT \end{cases} \quad (1)$$

方程组(1)中, d 是密度, p 是压力, T 是温度, \vec{V} 是速度矢量,它们除了是空间坐标的函数外,还是时间 t 的函数, k 是理想气体的比热比, R 是气体常数。

定常流动时,方程形式如下:

$$\begin{cases} 5 \cdot (\vec{d}V) = 0 \\ \vec{V} \cdot 5 \vec{V} + \frac{5p}{d} = 0 \\ \frac{p}{d} = \text{Const} \\ p = dRT \end{cases} \quad (2)$$

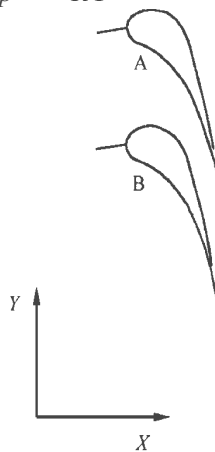


图 1 振动叶栅示意图

收稿日期: 1998-09-28; 修订日期: 1999-02-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59606004); 国家自然科学基金重大项目“大型旋转机械非线性动力学问题”资助

作者简介: 黄典贵(1963-),男,副教授,1994年10月毕业于清华大学动力工程与控制专业,博士学位,现任中国振动工程学会故障诊断学会理事,通讯处: 210096 南京东南大学国家火电机工程中心

方程组(2)中,流场参数 d, R, T 和 \vec{V} 只是空间坐标的函数,与时间无关

$$\text{由于: } \begin{cases} \vec{V} = \vec{V} + \hat{V} \\ d = d + \hat{d} \\ p = p + \hat{p} \\ T = T + \hat{T} \end{cases} \quad (3)$$

式(3)中, $\hat{p}, \hat{d}, \hat{T}, \hat{V}$ 是流动参数的脉动量,一般认为,脉动是小扰动.将式(3)代入式(1),略去

二阶小量,并对 $p = \frac{p}{d^k} = \text{const} \cdot (p + \hat{p})^k$ 在 d 处展开有:

$$\begin{cases} \frac{L\hat{d}}{L_t} + 5 \cdot (d\vec{V} + d\vec{V} + \hat{d}\vec{V}) = 0 \\ \frac{L\hat{V}}{L_t} + \vec{V} \cdot 5 \vec{V} + \vec{V} \cdot 5 \vec{V} + \vec{V} \cdot 5 \vec{V} + \vec{V} \cdot 5 \vec{V} + \vec{V} \cdot 5 \vec{V} \\ - \frac{kp}{(k-1)d^k} 5 [d^{k-1} + (k-1)d^{k-2}\hat{d}] = 0 \end{cases} \quad (4)$$

和

$$\begin{cases} \hat{p} = k \frac{p}{d} \hat{d} \\ \hat{T} = \frac{(k-1)T}{d} \hat{d} \end{cases} \quad (5)$$

式(2)中的前两个方程式代入式(4)得:

$$\begin{cases} \frac{L\hat{d}}{L_t} + 5 \cdot (d\vec{V} + \hat{d}\vec{V}) = 0 \\ \frac{L\hat{V}}{L_t} + \vec{V} \cdot 5 \vec{V} + \vec{V} \cdot 5 \vec{V} + \frac{kP}{d^k} 5 (d^{k-2}\hat{d}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

一般来讲,求解振荡流场问题时,首先求解定常流场,当定常解得到后,再求解振荡流场,定常解通常是求解振荡流场的必要条件,从式(6)也可以看出这一点.对于机翼周围的定常绕流,压气机或透平叶片内的定常流动等问题,数值求解方法比较成熟,已有相当多的实验结果可供数值解进行对照,数值求解得到的定常流场已具有相当高的可信度与准确性.因此,在求解振荡流场时,将已求得的定常流场作为已知条件是可行的.

如图1所示的叶栅,它是实际叶栅在某一径向位置的截面,当叶片沿周向(y 方向)振动而来流参数定常时,流场中任一位置处的任一流体参数脉动量 \hat{q} 将只是 y 和时间 t 的函数,该脉动量 \hat{q} 在径向

和轴向的分量为零.也就是说,当来流定常,只有叶片周向振动时,这类问题可简化成为一维问题.鸟类的翅膀对空气的扑击产生的振荡流场,机翼的振动产生的振荡流场,高层建筑的振动产生的振荡流场等都可以认为脉动量 \hat{q} 只在与振动物体表面垂直的方向上有分量,而在其它两个方向上脉动量为零.方程组(6)化成为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{L\hat{d}}{L_t} + \frac{L(d\hat{V}_y + \hat{d}V_y)}{L_y} = 0 \\ \frac{L\hat{V}_y}{L_t} + V_y \frac{L\hat{V}_y}{L_y} + V_y \frac{L\hat{V}_y}{L_y} + \frac{kP}{d^k} \frac{L(d^{k-2}\hat{d})}{L_y} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中, d, p 和 V_y 是定常量,它要通过三维流场的定常求解得到.也就是说,当研究定常来流(如远处风速一定的高层建筑,飞行速度一定的机翼,前方进气参数定常的叶片等)时,三维定常流中的 d, p 和 V_y 对脉动流是有影响的,而 x 方向上的定常速度 V_x 与 z 方向上的定常速度 V_z 对这类振荡问题没有影响.

为了便于寻求解析解,使上述问题简化是必要的,因此,我们来研究定常为静止时的情形,即假定定常流场中 d, p 分别为常数, $V_y = 0$,方程组(7)化成方程组(8)的形式.如果在这样的条件下方程组(8)能找到解析解,对实际振荡流场问题的研究也是具有相当大的指导意义的,特别对于振荡流场求解的数值方法的考核很有意义,也就是说,要证明振荡流场求解的数值方法可行有效,在定常为静止时,用数值方法求得的振荡流场与用精确解求得的振荡流场必须大体一致.

$$\begin{cases} L\hat{d}/L_t + dL\hat{V}_y/L_y = 0 \\ L\hat{V}_y/L_t + kPd^{k-2}L\hat{d}/L_y = 0 \end{cases} \quad (8)$$

既然简谐振荡是振荡现象中最简单也是最基本的一种振荡,且任何复杂的振荡现象都可以通过简谐振荡的迭加而成,因此,我们可以找到方程组(8)的简谐振荡形式的解析解.实际振荡流场可以是多种振荡频率解的迭加,对不考虑紊流的振荡流体而言,流体的振荡频率只与固体壁面的扰动频率有关,即刚性固体壁面的振动效率,弹性固体壁面的固有频率都可能使流体产生与之相应的振荡频率.

方程组(8)有如下形式的解析解:

$$\begin{cases} \hat{V}_y = \sum_i (C_i \cos r_i y + D_i \sin r_i y) \cos k_i t \\ \hat{d} = \frac{d^k}{kd^i} \sum (C_i \sin r_i y - D_i \cos r_i y) \sin k_i t \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)中的 \hat{d} 代入式(5)有:

$$\begin{cases} \hat{p} = \overline{k p d \sum_i (C_i \sin r_i y - D_i \cos r_i y) \sin k_i t} \\ \hat{T} = (k - 1) \frac{T}{k R} \sum_i (C_i \sin r_i y - D_i \cos r_i y) \sin k_i t \end{cases} \quad (10)$$

其中, k_i 为流体脉动的圆频率, 它们分别是刚性固体壁面的扰动频率, 弹性固体壁面的固有频率, C_i, D_i 为常数, 可由一维振荡流的首尾两个边界来确定, $r_i = k_i \frac{d}{k p}$. 也就是说, 当首尾两个边界确定后, 常数 C_i, D_i 可求, 这样, 整个一维流场的振荡解就由式 (9) 和 (10) 精确表达.

3 例子

设在一个圆柱状腔体内, 介质是理想气体 (空气), 如图 2 所示, E 是固定壁面, F 是一个以 k 圆频率在 $x_1 = x_0$ 附近振动的刚体, 求腔体内振荡流场的解析解.

这一问题中, 固体边界 E 的运动速度为零, F 的运动速度是 $u_B = A k \cos k t$ 腔体内空气的脉动圆频率只有 k 一个分量, 不可能有其它的频率分量. 因

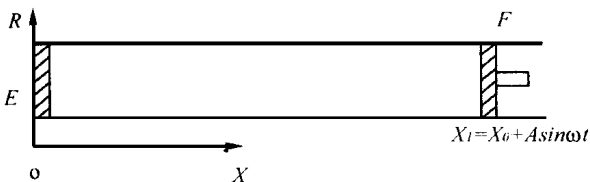


图 2 例 1 的示意图

此, 由式 (9) 和式 (10) 可得到腔体内脉动流场解析解的通解

$$\begin{cases} \hat{V}_x = \overline{(C \cos r x + D \sin r x) \cos k t} \\ \hat{d} = \frac{d^3}{k p} (C \sin r x - D \cos r x) \sin k t \\ \hat{p} = \overline{k p d (C \sin r x - D \cos r x) \sin k t} \\ \hat{T} = (k - 1) \frac{T}{k R} (C \sin r x - D \cos r x) \sin k t \end{cases} \quad (11)$$

其中, $r = k \frac{d}{k p}$, 常数 C 和 D 由下面的边界条件确定

由 $x = 0$ 时, $\hat{V}_x = 0$, 有 $C = 0$

由 $x = x_1$ 时,

$$\hat{V}_{x_1} = (C \cos r x_1 + D \sin r x_1) \cos k t = A k \cos k t$$

有: $D = A k / \sin [r(x_0 + A \sin k t)]$

将 C 和 D 代入式 (11) 就得到了这一问题的解析解.

$$\begin{cases} \hat{V}_x = \frac{A k}{\sin [r(x_0 + A \sin k t)]} \sin (r x) \cos k t \\ \hat{d} = \frac{d^3}{k d} \frac{A k}{\sin [r(x_0 + A \sin k t)]} \cos (r x) \sin k t \\ \hat{p} = \overline{k p d \frac{A k}{\sin [r(x_0 + A \sin k t)]} \cos (r x) \sin k t} \\ \hat{T} = (1 - k) \frac{T}{k R} \frac{A k}{\sin [r(x_0 + A \sin k t)]} \cos (r x) \sin k t \end{cases} \quad (12)$$

取 $p = 1 \text{ MPa}$, $d = 1.0 \text{ kg/m}^3$, $k = 1.4$, $A = 0.00001 \text{ m}$, $k = 314$ (弧度/秒), $x_0 = 1.0 \text{ m}$, 由式 (12) 得固体边界 E 上的压力函数为:

$$\hat{p} = \overline{k p d \frac{A k}{\sin [r(x_0 + A \sin k t)]} \sin k t}$$

是固体边界 E 上的压力曲线

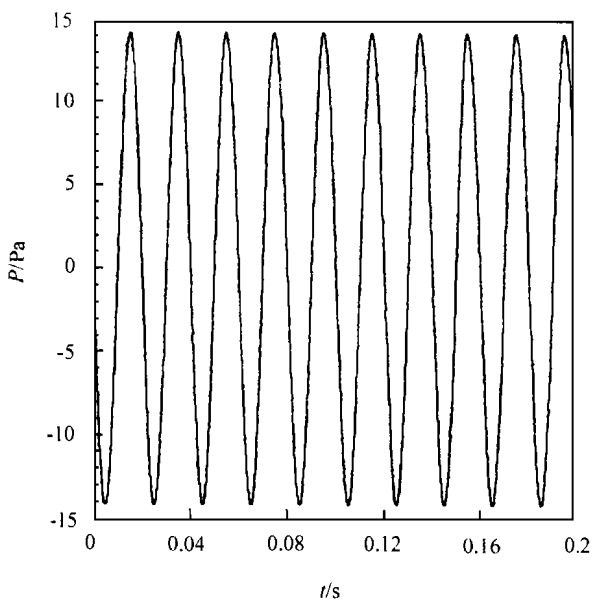


图 3 例 1 固体边界 E 上的压力曲线

4 结论

本文通过数学推导, 得到了完全气体一维无粘可压振荡流动的代数显式解析解, 这一解析解不但在理论上具有重要意义, 还可以作为检验各种数值解法的标准解, 这一解析解具有比较广泛的工程背景.

参考文献

- [1] 陈佐一等. 振荡流体力学. 水电出版社出版, 1988.
- [2] Theodorsen T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Report, 1935.

(何静芳 编辑)

istics and its Applications [刊,中] /Wang Peihong, et al (Southeastern University) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1999, 14(5). - 397~ 399

Described in this paper is a local quantitative analytical method for a steam power cycle, the so called power plant steam cycle function and equation method. It has been employed for the analysis of heat supply unit operating characteristics. In this connection the authors have prepared an universally applicable analytical software package. The analytical computation of typical heat supply units both at home and abroad has shown that the above-cited software package features ease of use and precision in calculation, contributing to an exceptionally high convenience for analyzing heat supply unit characteristics. **Key words** heat supply unit, cycle function, characteristics analysis

热电厂计算机监控与综合管理系统的研制 = Research and Development of a Computer-based Monitoring and Comprehensive Management System for Heat-and-Power Cogeneration Plants [刊,中] /Le Jing (Huazhong University of Science & Technology) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1999, 14(5). - 400~ 402

This paper presents a plant-wide comprehensive information and monitoring network system for cogeneration plants. It integrates the cogeneration plant production real-time monitoring, and remote and real-time monitoring of heat network end-users with the production real-time management and enterprise comprehensive management. Through the comprehensive utilization of a computer and its network technology the system under discussion has succeeded in realizing information sharing within the network, real-time monitoring of production and end-users as well as the enterprise comprehensive management. As a result, the safe and economic operation of the cogeneration plant is fully ensured along with a considerable enhancement of plant broad-based management level. **Key words** cogeneration plant, computer-based monitoring, computer-based comprehensive management

完全气体一维无粘可压振荡流动的一个解析解 = Analytical Solution of an Ideal Gas One-dimensional Non-viscous Compressible Oscillation Flow [刊,中] /Huang Diangui (National Research Center of Thermal Power Plants under the Southeastern University) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1999, 14(5). - 403~ 405

Presented in this paper is an algebraic and explicit analytical solution of ideal gas one-dimensional non-viscous compressible oscillation flow. In addition to its theoretical significance this solution can also serve as a standard method for verifying various kinds of numerical solutions. Moreover, it enjoys promising prospects in widespread engineering applications. **Key words** flow, oscillation

正确选择进油位置 = Maximization of the Effectiveness of an Oil Cleaning Device by Correctly Siting Its Oil Inlet [刊,中] /Wang Jinming (Huabei Municipal Thermal Power Plant) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1999, 14(5). - 406

轴承工作温度探讨 = An Exploratory Investigation of Bearing Operating Temperatures [刊,中] /Wang Jinming_ (Huabei Municipal Thermal Power Plant) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. - 1999, 14(5). - 407