

# 连续转子轴承系统的非线性动力学行为研究

荆建平<sup>1</sup>, 孙毅<sup>1</sup>, 李剑钊<sup>2</sup>, 夏松波<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨·第七〇三研究所, 黑龙江 哈尔滨 150036)

**摘 要:** 对一转子轴承系统, 采用有限元方法建立了非线性连续转子轴承系统模型, 分别采用直接积分法和模态组合法对偏心情况下转子的非线性动力学行为进行了分析, 并对两种方法的结果进行比较发现, 直接积分法对于求解非线性振动问题更有效。运用简单离散方法对该转子轴承系统进行了分析, 其结果与有限元法偏差较大。有限元的分析结果表明, 该转子轴承系统的动力学响应为一典型的油膜震荡过程, 其非线性动力学运动形式为 HOpl 分叉。

**关 键 词:** 连续转子系统; 非线性; 有限元; 油膜震荡

中图分类号: TH133.3; O347.6 文献标识码: A

## 1 前 言

由于油膜震荡在某些情况下会造成机组严重损伤, 甚至引起灾难性事故, 直接危及机组的安全生产, 因此, 其在汽轮机组转子动力学领域已成为人们十分关注的问题。对油膜失稳现象的分析一般采用两种方法: 一种是采用线性化油膜力的特征值法可以预测油膜失稳门槛值, 即油膜失稳转速。但该方法无法分析油膜失稳后系统的运动形式, 也就无法对油膜震荡进行准确的预报。另一种是采用非线性油膜力的数值积分方法。近十多年来, 国内外先后对此进行了大量研究, 但主要集中在简单转子—轴承系统的研究上, 在分析上主要采用的是简单离散方法, 转子多被简化为刚性转子和 Jeffcott 转子模型<sup>[1]</sup>, 只能对简单转子—轴承系统的非线性动力学行为进行定性的分析, 而对于油膜振荡, 目前还不能从非线性动力学行为方面给以合理的解释。

转子系统是一个复杂多因素的非线性系统, 构造一个能够比较真实地反映实际的模型往往要考虑到各种复杂非线性因素, 如转子的质量、转动惯量的分布效应、内阻尼和剪切效应、弯曲振动和扭转振动的组合效应、油膜轴承的非线性因素等。因此, 连续转子轴承系统非线性动力学行为的研究, 尤其是简

单离散系统与连续转子系统的非线性动力学行为间差别的研究, 对于油膜振荡的准确预报和转子轴承系统的非线性设计有着重要的意义。

本文将采用有限元法, 建立连续转子轴承系统模型, 考虑滑动轴承的非线性力因素, 分别采用直接积分法和模态组合法, 对油膜振荡的非线性动力学响应进行求解, 并与离散方法得到的转子轴承系统的非线性动力学行为进行比较, 以得到有益的结论。

## 2 理 论

考虑油膜力的非线性转子轴承系统的动力有限元控制方程为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{R(q, q, t)\} \quad (1)$$

式中  $[M]$ 、 $[D]$  和  $[K]$  分别为结构的质量、阻尼和刚度矩阵,  $\{R(q, q, t)\}$  为载荷列矢量,  $\{\dot{q}\}$ 、 $\{q\}$  和  $\{q\}$  分别为加速度、速度和位移列矢量。

对于式(1)的解法大体可分为直接积分法和模态叠加法两大类。

### 2.1 直接积分法

应用最广的直接积分方法有三种: 中心差分法、Wilson- $\theta$  法及 Newmark 法。由于中心差分法在求解时间步长选取存在一定的困难, 是一种条件稳定的方法, 这一点导致它在使用上具有很大的局限性。Wilson- $\theta$  法与 Newmark 法都为绝对收敛而且计算费用相当, 但 Newmark 法精度略高, 故对于本文的非线性情况将采用 Newmark 法。Newmark 法可以理解为线性加速度方法的扩展<sup>[2]</sup>。Newmark 法的差分形式为

$$\{q_{t+\Delta t}\} = \{q_t\} + [(1-\delta)\{\dot{q}_t\} + \delta\{\dot{q}_{t+\Delta t}\}] \Delta t \quad (2)$$

收稿日期: 2002-01-21; 修订日期: 2002-03-14

基金项目: 国家重点基础研究专项经费基金资助项目(G1998020321)

作者简介: 荆建平(1969-)男, 黑龙江哈尔滨人, 哈尔滨工业大学博士

$$\{q_{t+\Delta t}\} = \{q_t\} + \{\dot{q}_t\} \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \times \{\ddot{q}_{t+\Delta t}\} + \alpha \{\ddot{q}_t\} \right] \Delta t^2 \quad (3)$$

其中:  $\alpha$  和  $\delta$  是参数, 根据积分的精度和稳定性的要求来确定这两个参数

我们考虑时刻  $t + \Delta t$  的平衡方程

$$[M] \{\ddot{q}_{t+\Delta t}\} + [D] \{\dot{q}_{t+\Delta t}\} + [K] \{q_{t+\Delta t}\} = \{R_{t+\Delta t}\} \quad (4)$$

由式(2)通过  $\{q_{t+\Delta t}\}$  求出  $\{\dot{q}_{t+\Delta t}\}$ , 然后把  $\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}$  带入式(1)中, 就得到  $\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}$  和  $\{q_{t+\Delta t}\}$  的方程, 它们仅仅通过位移  $\{q_{t+\Delta t}\}$  来表示。把这两个关于  $\{q_{t+\Delta t}\}$  和  $\{\dot{q}_{t+\Delta t}\}$  的关系式带入式(3)中, 求出  $\{q_{t+\Delta t}\}$ , 然后利用式(1)和式(3)就可以算出  $\{\dot{q}_{t+\Delta t}\}$  和  $\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}$ 。可以证明, Newmark 法当  $\delta \geq 0.5$  和  $\alpha \geq 0.25(\delta + 0.5)^2$  时, 积分格式是无条件稳定的。一般取  $\delta = 0.5$  和  $\alpha = 0.25$  即可。

### 2.2 模态综合法

模态综合法是通过数学变换的方法来降低方程式(1)的矩阵阶数, 由系统的自由无阻尼的自由振动平衡方程

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0 \quad (5)$$

可得到广义特征值问题

$$[K] \{\Phi\} = \omega^2 [M] \{\Phi\} \quad (6)$$

可得到式(6)的特征矩阵  $[\Phi]$ , 则

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = (diag[\Omega])^2 \quad (7)$$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (8)$$

式(1)可变换为

$$\{\dot{X}(t)\} + [D] \{X(t)\} + [\Omega]^2 \{X(t)\} = \{\bar{R}(T)\} \quad (9)$$

对于完整的响应, 必须算出式(9)中的所有解, 并将每一模态的响应叠加起来就得到有限元的节点位移, 即

$$\{q(t)\} = \sum_{i=1}^m \{\Phi_i\} x_i(t) \quad (10)$$

其中:  $\{\Phi_i\}$  为第  $i$  阶模态振型。

### 3 非线性转子动力学模型

本文选取较为简单的单盘对称转子模型(图1), 两端支撑为滑动短轴承, 其中轮盘质量  $M_1 = 374$  kg, 轴承质量  $M_2 = 27$  kg; 有限元模型见图2, 其中每个节点为4个自由度, 分析采用等参梁单元, 轮盘质量和轴承质量作为集中质量分别加到相对应的节点上。

其中,  $F_x, F_y$ —非线性油膜力分量;  $M_1$ —转子轮盘质量;  $M_2$ —轴承质量;  $D_1$ —轮盘阻尼。油膜力采用短轴承理论,  $F_x = f_x \cdot \hat{q}$   $F_y = f_y \cdot \hat{q}$   $\hat{q}$ —Sommerfeld 修正数,  $\hat{q} = \mu \omega R L \left( \frac{R}{c} \right)^2 \left( \frac{L}{2R} \right)^2$ , 其中:  $\mu$ —润滑油粘度,  $c$ —轴承半径间隙,  $L$ —轴承长度,  $R$ —轴承半径,  $f_x, f_y$  由文献[3]确定:

$$\begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases} = - \frac{[(x-2y)^2 + (y+2x)^2]^{1/2}}{1-x^2-y^2} \times \begin{cases} 3xV(x, y, \alpha) - \sin\alpha G(x, y, \alpha) - 2\cos\alpha S(x, y, \alpha) \\ 3yV(x, y, \alpha) + \cos\alpha G(x, y, \alpha) - 2\sin\alpha S(x, y, \alpha) \end{cases}$$

式中:

$$V(x, y, \alpha) = \frac{2 + (y\cos\alpha - x\sin\alpha)G(x, y, \alpha)}{1 - x^2 - y^2}$$

$$S(x, y, \alpha) = \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{1 - (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2}$$

$$G(x, y, \alpha) = \frac{2}{(1 - x^2 - y^2)^{1/2}} \times \left[ \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{(1 - x^2 - y^2)^{1/2}} \right]$$

$$\alpha = \arctg \frac{y+2x}{x-2y} - \frac{\pi}{2} \text{sign} \left[ \frac{y+2x}{x-2y} \right] - \frac{\pi}{2} \text{sign}(y+2x)$$

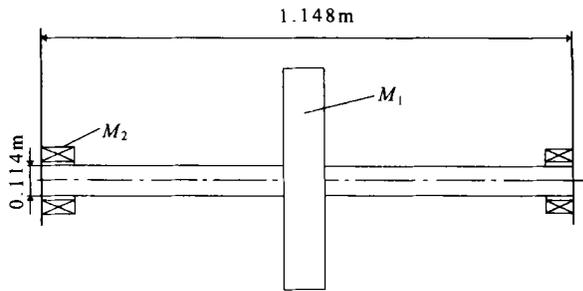


图1 单盘对称转子模型

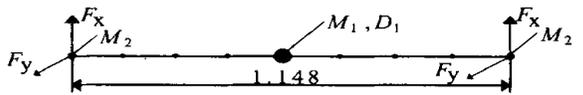


图2 转子有限元模型

### 4 转子非线性动力学行为数值分析与比较

对于3节中的模型, 各参数取

$\mu = 18 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ ,  $R = 57 \text{ mm}$ ,  $L = 28.5 \text{ mm}$ ,  $c = 0.2 \text{ mm}$ ,  $D_1 = 3.0 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ , 其中转子无量纲偏心为  $\rho = e/c = 0.1$ 。图3给出了采用直接积分法计算得到的升速过程的轴承处转子响应的三维谱图。

从图3可以看出, 在  $\omega = 400 \text{ rad/s}$  附近时, 系统

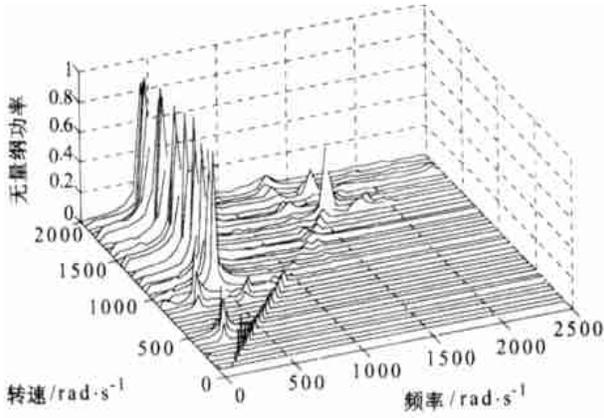


图 3 转子响应的三维谱图

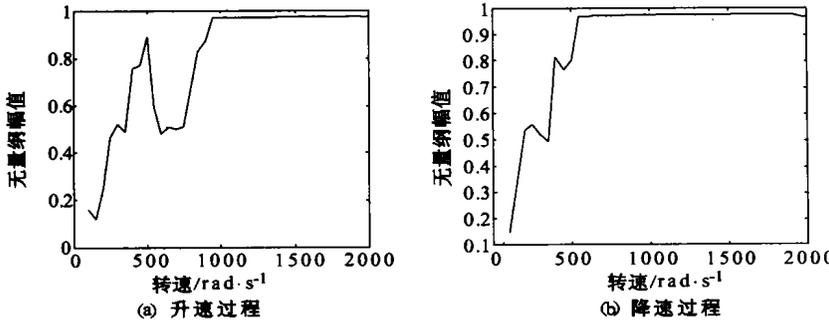


图 4 转子振幅变化曲线

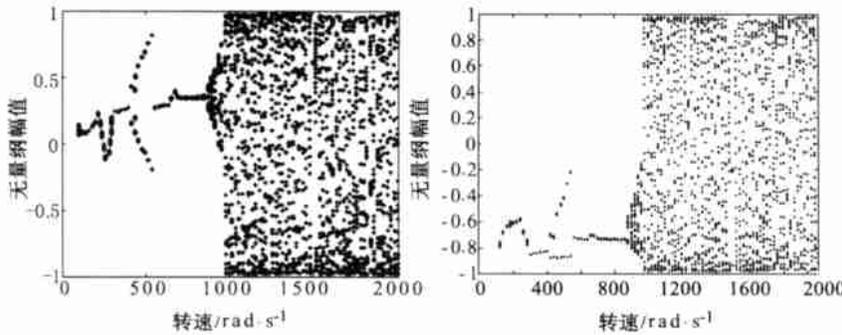


图 5 轴承处转子响应在升速过程中的全局分岔图

幅开始陡直上升;而在降速过程中,当转速到达 1 000 rad/s 左右时,振幅并没有急剧下降,而是转速降到 550 rad/s 附近,振幅才开始减小,由此进一步可以看出该过程为典型的油膜振荡。

为考察油膜振荡的非线性动力学运动形式,图 5 给出了轴承处转子响应在升速过程中的全局分岔图,从图 5 可以看出,随着转速的升高,该转子轴承系统在 500 rad/s 附近出现了倍周期分叉,但转速上升到 580 rad/s 左右倍周期分叉消失,响应改为稳态解,当转速达到 1 000 rad/s 附近,系统发生概周期运动,由此可以看出,该运动为较为典型的具有迟滞特征的 Hopf 分叉。

分别采用模态综合法和直接积分法,得到了  $\omega =$

600 rad/s 下的轴承处的轴心轨迹,见图 6 其中模态综合法分别取前 6 阶模态和前 8 阶模态。从分析结果可以看出,模态的截取会带来求解的偏差,采用的模态越少,求解的结果偏差越大。而且,在求解的过程中发现:由于模态综合法求解的偏差当轴承处的振幅较大或频率成分较为复杂时,在油膜力的求解过程中易产生溢出。因此,在连续转子轴承系统的非线性动力学行为的求解过程中,直接积分法较模态综合法不仅求解精度高,而且使用起来更为有效。

为考察连续转子轴承系统的动力学行为与目前广泛采用的简单离散转子模型的非线性动力学行为间的差别,将图 1 中的转子模型,离散为三个质点,把轴段处的质量分别离散到轴承和轮盘处,两轴段等效为刚度  $k_p$ , 轮盘处的阻尼为  $d_1$ , 油膜力分别作用在两个轴承处的质点上,如图 7 所示。系统动力学方程由式 (11) 给

开始出现半速涡动,到达转速为  $\omega = 600 \text{ rad/s}$  附近涡动消失,到达约  $\omega = 900 \text{ rad/s}$  时半速涡动再次出现,振幅急剧上升,当转速升至 1 000 rad/s 附近,频率锁定在 500 rad/s 左右,这接近于采用线性理论得到的该转子的一阶固有频率 503 rad/s,且振幅保持在较高水平,具有油膜振荡的典型特征<sup>[4-3]</sup>。为进一步考察转子响应的油膜振荡特征,图 4 分别给出了系统在升速和降速过程中振幅随转速变化曲线。结果表明:升速过程中,转速在 1 000 rad/s 附近时,振

出。

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{1}{m_{22}}f_x \\ \ddot{y}_2 = -\frac{k}{m_2}(y_2 - y_1) + \frac{1}{m_{22}}f_y - G \\ \ddot{x}_1 = -\frac{\alpha}{m_1}x_1 - \frac{2k}{m_1}(x_1 - x_2) + \rho \cos \tau \\ \ddot{y}_1 = -\frac{\alpha}{m_1}y_1 - \frac{2k}{m_1}(y_1 - y_2) + \rho \sin \tau - G \end{cases} \quad (11)$$

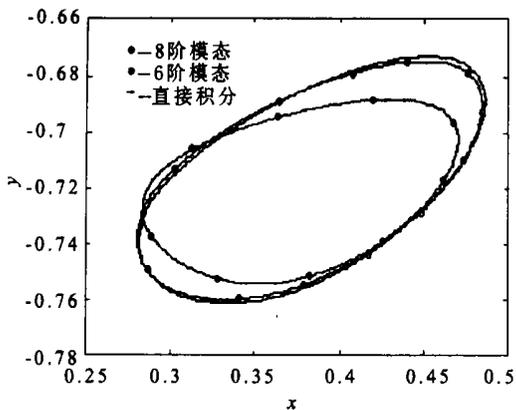


图 6 直接积分法与模态综合法求解结果比较 ( $\rho = 0.1, \omega = 600 \text{ rad/s}$ )

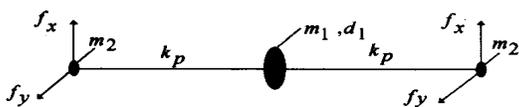


图 7 单盘转子的离散模型

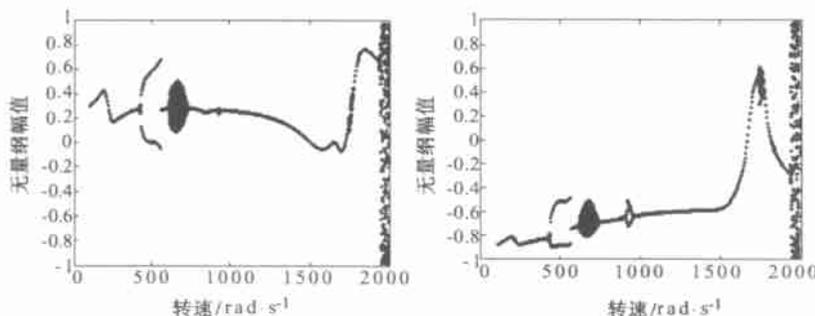


图 8 离散模型轴承处转子响应的分岔图

其中: 无量纲坐标  $x_i = \frac{X_i}{c}, y_i = \frac{Y_i}{c}, G = \frac{g}{c\omega^2}$ —无量纲外载荷,  $\tau = \omega t$ —无量纲时间,  $e$ —偏心量,  $c$ —轴承半径间隙,  $\rho = \frac{e}{c}, m_2 = \frac{m_2 \omega^2 c}{\delta}, \alpha = \frac{d_1}{\omega}, k = \frac{k_p}{\omega^2}, f_x, f_y$  由文献[3]确定。其中:  $m_1 = 420 \text{ kg}, m_2 = 50 \text{ kg}, 2k_p = 2.105 e + 8 \text{ N/m}, d_1 = 3.0 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。轴承参数与前面有限元求解时相同。对该模型采用龙格库塔法积分, 求得了无量纲偏心  $\rho = e/c = 0.1$  时的轴承处的全局分岔图, 见图 8。将图 8 与图 5 进行比较可以看出, 对同一个非线性转子轴承系统, 有限元方法和简单离散方法所求得的非线性动力学行为是截然不同的。为考察分布质量和连续系统多自由度的影响, 将有限元模型各节点的转动自由度约束, 把轴段的分布质量集中到节

点上, 其计算结果与简单离散方法所得结果完全一致。由此可以看出, 由于忽略了分布质量以及其它一些转子本身非线性因素的影响, 采用简单离散的方法求解连续转子轴承系统的非线性动力学行为会带来很大的偏差。

### 5 结论

本文通过采用有限元法对连续转子轴承系统的非线性的动力学行为的研究, 并同简单离散方法进行了比较, 得到了以下结论:

(1) 从分析结果可以看出, 模态的截断会带来求解的偏差。采用的模态越少, 求解的结果偏差越大。而且, 由于模态综合法求解的偏差, 当轴承处的振幅较大或频率成分较为复杂时, 在油膜力的求解过程中易产生溢出, 给求解带来困难。因此, 在连续转子轴承系统的非线性动力学行为的求解过程中, 直接积分法较模态综合法不仅求解精度高, 而且使用起来更为有效。

(2) 由于简单离散方法忽略了如转子的质量、转动惯量的分布效应、内阻尼和剪切效应的影响, 其分析结果与实际偏差很大, 故不能真实地反映转子轴承系统的非线性动力学行为。而有限元法可以考虑以上多种因素的影响, 因此有限元法的分析结果比离散方法的结果更接近实际。

(3) 分析给出的系统的运动状态表明: 该连续转子轴承系统的振动响应应具有油膜震荡的典型特征, 该油膜振荡在非线性动力学运动形式上表现为具有迟滞效应的 Hopf 分岔。

### 参考文献:

- [1] 郑铁生. 高维局部非线性转子—轴承系统的稳定性和分岔[J]. 航空学报, 1997, 19(3): 284—292.
- [2] 何君毅, 林祥都. 工程结构非线性问题的数值解法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.
- [3] ADILETTA G, GUIDO A R, ROSSI C. Chaotic motions of a rigid rotor in short journal bearings[J]. *Nonlinear Dynamics* 1996, 10: 251—269.
- [4] MUSZYNSKA A. Whirl and whip-rotor/bearing stability problems[J]. *Journal of sound and Vibration*, 1996, 110(3): 443—462.
- [5] 张学延, 寇胜利, 孙岱露. 国产 200 MW 汽轮发电机组油膜震荡的现场测试与分析[J]. 1992, 12(5): 32—37.

**“W” Flame Boiler** [刊, 汉] / MIAO Chang-xin, LIU Zhi-chao (Shandong Electric Power Research Institute, Jinan, China, Post Code: 250002) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2002, 17(6). — 599 ~ 602, 631  
Presented are the design features and combustion characteristics of a W-flame boiler designed and manufactured by British MBEL Co. and installed at Heze Power Plant. In connection with the commissioning test results expounded and analyzed are the air distribution of burners, the characteristics of fuel burn-out and NO<sub>x</sub> and SO<sub>2</sub> emissions. In addition, there existed a whole range of problems, such as the poor mixing of combustion-air distribution in a parallel-flow field at a later stage, the slag formation on a lower furnace refractory-belt, and the excessive amount of NO<sub>x</sub> emissions. To deal with these problems, the authors have made some preliminary recommendations to alleviate them. **Key words:** W-flame boiler, design features, combustion characteristics, proposals for improvement

**内置过滤元件流化床的最小流化速度= Minimum Fluidizing Speed of a Fluidized Bed with Built-in Filtration Elements** [刊, 汉] / ZHANG Shi-hong, LIU De-chang, ZHENG Chu-guang (National Key Laboratory of Coal Combustion under the Huazhong University of Science & Technology, Wuhan, China, Post Code: 430074) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2002, 17(6). — 603 ~ 606

With a novel fluidized-bed granular filter (FBGF) serving as an object of application an experimental investigation was conducted of the minimum fluidizing speed of a fluidized bed with built-in filtration elements. It has been discovered by the investigation that the greater the effective area of immersed material layer of the filtration element, the greater the minimum fluidizing speed. In this regard a dimensionless magnitude has been defined as the ratio between the following two items: the effective surface area of a filtration element immersed in the bed material, and the fluidized bed cross-section area. And, by means of regression obtained was an empirical expression of the minimum fluidizing speed of a fluidized bed with built-in filtration elements. This has laid a solid basis for the further study of a fluidized-bed granular filter. **Key words:** minimum fluidizing speed, fluidized bed with built-in filtration elements, granular filter

**连续转子轴承系统的非线性动力学行为研究= Research on the Nonlinear Dynamic Behavior of a Continuous Rotor-bearing System** [刊, 汉] / JING Jian-ping, SUN Yi, XIA Song-bo (School of Energy Science & Engineering under the Harbin Institute of Technology, Harbin, China, Post Code: 150001), LI Jian-zhao (Harbin No. 703 Research Institute, Harbin, China, Post Code: 150036) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2002, 17(6). — 607 ~ 610

By using a finite element method a nonlinear continuous rotor-bearing system model has been set up for a rotor-bearing system. With the use of respectively a direct integration method and modality synthesis method the rotor nonlinear dynamic behavior under unbalanced conditions was analyzed. The results of comparison of the above two methods indicate that the direct integration method is more effective for solving nonlinear vibration problems. The rotor-bearing system was analyzed by using a simple discrete method. The results of the analysis are quite different from those obtained under the finite-element analysis method. The results of the latter method show that the dynamic response of a rotor-bearing system is of a typical oil-whip process with its nonlinear dynamic-motion behavior being of a Hopf bifurcation form. **Key words:** continuous rotor system, nonlinearity, finite element, oil whip

**多股流板翅式换热器温度交叉的数值分析= Numerical Analysis of the Temperature Crossover of a Multi-stream Plate-fin Heat Exchanger** [刊, 汉] / LU Hong-bo, CUI Guo-min, LI Mei-ling (Research Institute of Thermal Energy Engineering under the Shanghai University of Science & Technology, Shanghai, China, Post Code: 200093) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2002, 17(6). — 611 ~ 613

With a parallel multi-stream plate-fin heat exchanger serving as a target of study the authors have presented an energy equation for both the fluid and fins of the said heat exchanger, taking into account the bypass effect of the fins. A numerical solution is conducted of the energy equation under the conditions of changing the fluid parameters and flow modes of