文章编号:1001－2060(2003)01－0082－04

下降液膜流动模型及稳定性分析

钱焕群, 胡志华, 孙贺东, 周芳德

(西安交通大学 多相流国家重点实验室, 陕西 西安　710049)

摘　要: 建立了自由下降液膜流动的完备的数学模型。采用边界层理论对模型进行分析简化, 得到液膜流动的二阶边界层模型, 并对二阶边界层模型进行稳定性分析, 计算获得下降液膜波的增长率和中性稳定曲线, 将计算结果与其它模型的计算结果进行了比较, 证实了二阶边界层模型具有更好的预测效果, 其形式便于作进一步的非线性分析。

关　键　词: 液膜; 边界层; 波; 增长率; 中性稳定

中图分类号: O359　　　文献标识码: A

1　引　言

液膜流动现象普遍存在于多种工业设备, 如冷凝设备、蒸发设备、气体吸收设备以及润滑装置等。液膜的流动对传热、传质及阻力特性有很大的影响, 因此, 液膜流动的研究具有重要的理论和应用价值。

Pierson 和 Whitaker 对下降液膜进行了实验并对其 Orr-Sommerfeld 方程进行理论计算, 阐明了下降液膜流动所具有的波动特性[1]。Kapitza 对 Orr-Sommerfeld 方程进行了简化分析, 获得 Kapitza 模型[2]。该模型简单(属一阶边界层模型), 只能反应一定的液膜流动波的特征。本文将从完备的下降液膜流动的模型出发, 采用边界层理论进行分析简化, 建立二阶边界层模型, 作为探讨下降液膜流动的非线性问题的基础。

2　液膜流动模型

粘性液体受重力驱动, 沿垂直壁面形成波状的下降液膜, 液体自由表面附近是静止气体, 液膜流动如图 1 所示。根据实际情况, 液膜厚度与流动方向尺度相比非常小, 可以认为液膜的流动为二维流动。

据经典流体力学理论, 假定壁面上无滑移现象, 从而壁面边界条件为:

$$u = v = 0, y = 0 \tag{1}$$

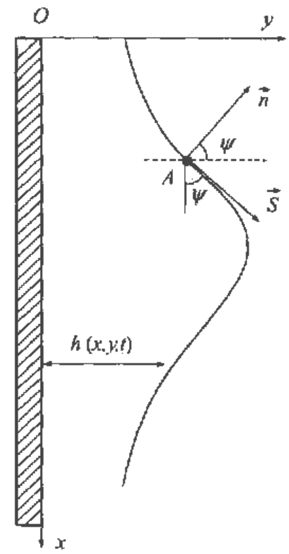

图 1　波状液膜表面示意图

设 A 点是自由界面上任意一点。A 点的单位法向矢量和单位切向矢量分别为 $\vec{n}$ 和 $\vec{s}$, 其表示形式可为 $\vec{s} = \vec{i}\cos\Psi + \vec{j}\sin\Psi$, $\vec{n} = \vec{i}(-\sin\Psi) + \vec{j}\cos\Psi$。根据导数的定义, 存在关系式 $\tan\Psi = \partial h/\partial x$, 其中 h 表示液膜的厚度。显然 A 点的法向速度为

$$(u\vec{i} + v\vec{j})\cdot\vec{n} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = v \tag{2}$$

在自由界面上液体和空气的法向方向和切向方向受力平衡方程为

$$[T_s] = 0 \tag{3}$$

$$[T_n] + \frac{\sigma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} = 0 \tag{4}$$

式中: σ 为表面张力, [] 表示自由界面上应力之和, T_s 和 T_n 为空气和液体在自由界面上的切向应力和法向应力。

在流体力学中, 矢量和张量有 $t_n = \vec{n}\cdot T = (T_{yx}\cos\Psi - T_{xx}\sin\Psi)\vec{i} + (T_{yy}\cos\Psi - T_{xy}\sin\Psi)\vec{j}$ 的关系, 且张量 T 存在对称关系 $T_{yx} = T_{xy}$。其中, T_{xx}、T_{yy} 和 T_{yx} 分别为 $T_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$, $T_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $T_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$。所以, A 点的切向应力和法向应力为

$$T_s = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\Psi + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\Psi \tag{5}$$

收稿日期: 2002－03－20;　修订日期: 2002－09－08

基金项目: 国家 973 基金资助项目(G1999022308).

作者简介: 钱焕群(1964－), 男, 江苏淮阴人, 西安交通大学博士研究生.

$$T_n = -p - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\Psi + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\sin^2\Psi + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\Psi \tag{6}$$

如果忽略空气的粘性, 则在自由界面上, 切向应力和法向应力各自总和表示为

$$[T_s] = -(T_s)_{film} \tag{7}$$

$$[T_n] = -p_{air} - (T_n)_{film} = -p_0 - (T_n)_{film} \tag{8}$$

液体在 A 点的切向应力和法向应力按式(5) 和式(6) 确定, 这样就获得了自由下降液膜流动的二维 $N-S$ 流动方程, 其表示为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+g+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{11}$$

边界条件为

$$u=v=0,\quad y=0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=v,\quad y=h \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{2h_x}{1+h_x^2}=0,\quad y=h \tag{14}$$

$$p-p_0+2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{2h_x}{1+h_x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{2h_x}{1+h_x^2}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{1}{1+h_x^2}\right]+\sigma\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}=0,\quad y=h \tag{15}$$

3　液膜流动方程的简化

显然, 上述方程是非线性方程, 且具有很强的非线性。对于非线性问题的研究, 通常采用数值方法和解析两种方法。在解析方法中又有解析求解和定性分析两种, 解析解一般不易获得, 所以往往对方程作定性分析以获得问题中所含的规律性, 为数值计算提供有益的信息, 如离散方法的选择, 数据的处理等。在非线方程的定性分析中, 一般需要对原有的非线性方程进行简化。

本文根据边界层理论对液膜流动模型方程进行简化分析。流动方向 x 的坐标采用波长 λ 作为参考度量, 坐标 y 方向由努谢尔液膜厚度 h_N 度量, 速度 u 分量由努谢尔平均速度 u_N 度量, 速度 v 分量由 εu_N ($\varepsilon = h_N/\lambda$), 压力则为 ρu_n^2, 时间为 λ/u_N。那么, 液膜流动方程化为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{12}{R}+\frac{4}{R}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{16}$$

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{4}{R}\left(\varepsilon^4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{18}$$

边界条件为:

$$u=v=0,\ y=0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=v,\ y=h \tag{20}$$

式中: $R=\varepsilon Re$　(21)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(1+\varepsilon^2h_x^2)+2\varepsilon^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)h_x=0 \tag{22}$$

$$P+\frac{8\varepsilon^2}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{h_x}{1+\varepsilon^2h_x^2}-\frac{8\varepsilon^4}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{h_x^2}{1+\varepsilon^2h_x^2}-\frac{8\varepsilon^2}{R}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{1}{1+\varepsilon^2h_x^2}+\varepsilon^2We\frac{\varepsilon^2h_{xx}}{(1+\varepsilon^2h_x^2)^{3/2}}=0 \tag{23}$$

式中: $P=\dfrac{p-p_0}{\rho u_N^2}$　(24)

在简化过程中, 除了保证使方程容易分析外, 还要尽量考虑更多的影响因素和参数。大量的文献和实验说明, 液膜流动不仅存在长波而且存在大幅度波。在雷诺数较高或存在大幅度波的情况下, 因为波前液膜的曲率较大, 所以不能简单地忽略法向压力梯度。如果我们保留 y 方向动量方程式(17) 中二阶项 ε^2, 则将使非线性方程的分析非常复杂。因此, 采用的方法必须既能够考虑液膜中压力变化而且能够使方程更容易分析与求解。

根据由 Schlichting(1955) 提出的结果[3], 法线方向的压力梯度可近似为:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\rho R(x)u^2 \tag{25}$$

式中: $R(x)$ 为液膜的曲率。液膜的曲率近似为:

$$R(x)=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{26}$$

同时, 在切向和法向应力边界条件, 二阶项 ε^2 与单位 1 相比可以舍去。这样, 模型简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+g+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{27}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\rho h_{xx}u^2 \tag{28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{29}$$

边界条件为:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=v,\ y=h(x,t) \tag{30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+4h_x\frac{\partial v}{\partial y}=0,\ y=h(x,t) \tag{31}$$

$$p-p_0-2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}-h_x\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\sigma h_{xx}=0,\ y=h(x,t) \tag{32}$$

4　线性稳定性分析

已有的实验证明, 当雷诺数大于 1 200 时, 垂直向下的液膜流动明显属于湍流; 当雷诺数小于 1 200 时, 则为层流。属于层流的液膜流动服从层流摩擦阻力规律, 采用努谢尔(1916)创立的简单理论就可以计算液膜厚度。尽管如此, 在整个层流范围内, 自由表面还是观察到波的现象。所以, 本部分也将从上述建立的简化的二阶下降液膜流动模型研究其线性稳定特征。

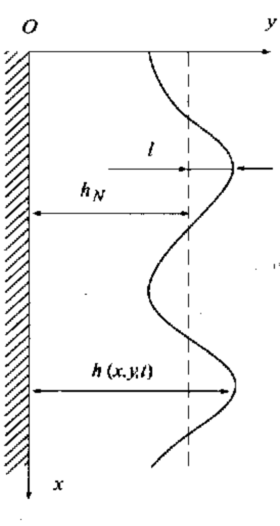

图 2　波状液膜厚度示意图

4.1　线性化方程

在液膜流动中, 努谢尔液膜流动是最简单的稳定流动, 其状态参数记作 $u=u_0(y)$, $v=0$, $h=h_N$, $p_0=0$。波状液膜的流动可以认为是平滑液膜流动和微小波动的叠加, 如图 2 所示。

相对于平稳的液膜流动, 波状液膜的自由表面的波动可表示为:

$$l=\delta h_N e^{2\pi i(x-ct)/\lambda} \tag{33}$$

式中: λ 为波长, x 距离, t 为时间, c 为复数增长速度常数, $c=c_r+ic_i$, c_r 表示波沿 x 方向传播的速度(相速度), c_i 表示扰动衰减或增长的程度, δ 为扰动的幅度($\delta\ll1$)。因为 $2\pi/\lambda$ 即表示波数, 其设为 α, 和 c_i 的乘积 αc_i 则表示一定波长的扰动波的增长或衰减的系数, 就是说不同波长的波在液膜流动中具有不同的增长或衰减系数。

波状液膜流动的扰动速度设为:

$$u^*=\mathscr{F}(y)e^{2\pi i(x-ct)/\lambda} \tag{34}$$

$$v^*=\frac{2\pi i}{\lambda}\mathscr{F}(y)e^{2\pi i(x-ct)/\lambda} \tag{35}$$

波状液膜流动的速度则为 $u=u_0+u^*$, $v=v^*$, 液膜厚度则为 $h=h_N+l$。将其代入式(27)~式(32)并化简, 得

$$F'''=\alpha^2F'+i\alpha\frac{Re}{4}[(U_0-Ce)F'-U'_0F]+i\alpha^3\frac{Re}{4}\left(We+\int_y^1U_0^2\mathrm{d}Y\right)+2\alpha^2F'(1) \tag{36}$$

式中: $U_0=3\left(Y-\frac{Y^2}{2}\right)$　(37)

$$\int_Y^1U_0^2\mathrm{d}Y=1.2-3Y^2+2.25Y^4-0.45Y^5 \tag{38}$$

边界条件为:

$$F=F'=0,\ Y=0 \tag{39}$$

$$-3+F''(1)+\alpha^2F(1)=0,\ Y=1 \tag{40}$$

$$F(1)=Ce-\frac{3}{2},\ Y=1 \tag{41}$$

式中: $\alpha=\frac{2\pi h_N}{\lambda}$ 为无因次波速, $Ce=\frac{c}{u_0}$ 为无因次增长速度, $U_0=\frac{u_0}{u_N}$ 为无因次速度, $F=\frac{f}{u_Nh_N}$ 为无因次扰动特征函数, $Re=\frac{4u_Nh_N}{v}$ 为雷诺数, $Y=\frac{y}{h_N}$ 撇号(′)表示特征函数 F 对 Y 的导数。

上述即是垂直液膜向下流动的线性化稳定方程。方程中的特征函数也是波数 α, Re, σ 和 Ka 的函数。从速度的虚数部分确定流动的稳定性。如果 $c_i>0$, 微小扰动与时间呈指数增长, 流动即会变得不稳定; 如果 $c_i<0$, 扰动呈指数衰减, 流动即是稳定的; 如果 $c_i=0$, 扰动随时间既不增长也不衰减, 使得变量 α、Re 和 Ka(Kapitza 数, 定义为 $Ka=\frac{\sigma}{\rho(v^4g)^{1/3}}$)具有一定的关系, 即称为中性稳定曲线。本文采用打靶法求解线性化稳定方程。

4.2　结果与分析

垂直下降液膜流动的二阶边界层模型的线性稳定分析的计算结果(记作 SBL)如图 3 所示。此图同

时给出了Oee-Sommerfeld方程的线性稳定分析的计算结果(记作O-S)[1]和一阶边界层模型的线性稳定分析的计算结果(记作BL)[2]。

从图3可知, 由三个模型计算获得的波的增长率的最大值(其对应的波的数目记作α_m)非常一致。但是, 当波的数目大于0.5时, 三条波的增长率曲线开始出现左偏差。导致偏差的原因是, 在推导边界层模型过程中假设了波是长波或者波的数目很小。图3中还表明, 二阶边界层模型与Oee-Sommerfeld方程具有更好的一致性, 因为二阶项在具有高频率波的流动情况下具有重要的影响。

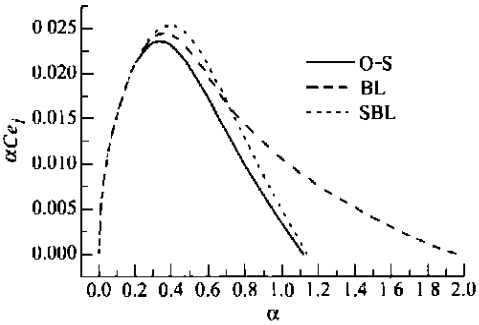

图3　当雷诺数为1 200, 流体为水时波的增长率和波数之间关系曲线

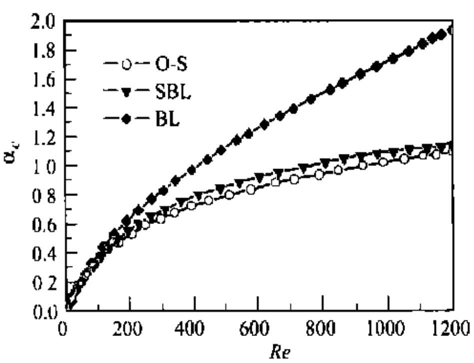

图4　中性稳定曲线随雷诺数变化关系

图4表示水流体的中性稳定曲线。在雷诺数小于100的情况下, 三个模型的计算结果几乎相同; 当雷诺数大于100时, 一阶边界层模型的计算结果与Oee-Sommerfeld方程的计算结果具有明显的偏差。然而, 即使当雷诺数很高时, 二阶边界层模型的计算结果和Oee-Sommerfeld方程的计算结果还是非常接近。

比较表明, 在所讨论的流量范围内, 一阶边界层模型和二阶边界层模型均有效, 但二阶边界层模型在高雷诺数情况下具有更好的近似效果。

下降液膜流动波的发展是属于强非线性现象, 虽然线性稳定分析方法能描述非线性问题所具有的部分波的特征, 但是, 如果作深入的研究则显得欠缺, 而且用线性理论描述非线性问题本身就缺乏严谨的一面。本文建立的二阶边界层模型旨在采用非线性理论对下降液膜流动进行更深层次的研究。

5　结论

通过对下降液膜的完备的流动方程进行边界层理论分析, 得到了简化的二阶边界层模型。经过对该模型进行线性稳定分析, 并将计算结果与Oee-Sommerfeld方程和一阶边界层模型两者的计算结果进行了对比, 二阶边界层模型能够描述下降液膜流动的波的特征, 且比一阶边界层模型具有更好的精确性。在大雷诺数和具有高频率波动的液膜流动情况下, 二阶边界层模型近似效果更加明显。

参考文献:

[1]　PIERSON F W, WHITAKER S. Some theoretical and experimental observations of the wave structure of falling liquid films[J]. **Ind Eng Chem Fundam**, 1977, **16**: 401—408.

[2]　LEE J. Kapitza's method of film flow description[J]. **J Chem Eng Sci**, 1969, **24**: 1309.

[3]　史里希廷. 边界层理论[M]. 徐燕侯译. 北京: 科学出版社, 1991.

(辉　编辑)

几种参考文献的书写格式(其中空格、标点符号、字母照写)

连续出版物:	[标引序号]	作者. 文题[J]. 刊名, 年, 卷(期): 起始页码—终止页码.
专　　著:	[标引序号]	作者. 书名[M]. 出版地: 出版者, 出版年.
译　　著:	[标引序号]	作者. 书名[M]. 译者. 出版地: 出版者, 出版年.
论 文 集:	[标引序号]	作者. 文题[A]. 编者. 文集[C]. 出版地: 出版者, 出版年. 起始—终止页码.
学位论文:	[标引序号]	作者. 文题[D]. 所在城市: 保存单位, 年份.
专　　利:	[标引序号]	申请者. 专利名[P]. 国名: 专利号, 发布日期.
技术标准:	[标引序号]	技术标准代号, 技术标准名称[S].
技术报告:	[标引序号]	作者. 文题[R]. 报告代码及编号, 地名: 责任单位, 年份.

注: M—专著; C—论文集; N—报纸; J—期刊; D—学位论文; R—报告; S—标准; P—专利

is necessary to conduct a more thoroughgoing research on a reference environment model. **Key words**: exergy, environmental impact, pressurized fluidized bed combustion combined cycle (PFBC-CC), emissions

水煤膏压力泌水特性与可泵性分析 = **Coal-water Paste Water-seeping Properties under Pressure and Its Pumpability** [刊, 汉] / LU Ping (Power Engineering Institute under the Nanjing Normal University, Nanjing, China, Post Code: 210042), ZHANG Ming-yao (Thermal Energy Engineering Institute under the Southeastern University, Nanjing, China, Post Code: 210096) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2003, 18(1). —78 ~ 81

Water-seeping properties of coal-water paste (CWP) under pressure are studied experimentally with the influence of particle size distribution and water content, etc on the pumping properties of CWP being analyzed. In conjunction with a CWP slump index proposed is a pumpability evaluation index of the CWP. It is found that the pumpability of the CWP can be featured by two indexes, namely, the slump and the total quantity of water seeping under pressure. The CWP with a good pumpability has a slump in the range of 8 - 24cm. The corresponding relative water seeping rate and water seeping quantity are respectively $S_{10} \leqslant 40\%$ and V = 70—110 ml. **Key words**: coal-water paste, water seeping under pressure, pumpability

下降液膜流动模型及稳定性分析 = **Model of a Falling Liquid-film Flow and an Analysis of Its Stability** [刊, 汉] / QIAN Huan-qun, HU Zhi-hua, SUN He-dong, et al (National Key Laboratory of Multi-phase Flows under the Xi'an Jiaotong University, Xi'an, China, Post Code: 710049) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2003, 18(1). —82 ~ 85

A sound mathematical model has been set up for the film flow of a free falling liquid. Boundary layer theory was used to analyze and simplify the model, securing a second-order boundary-layer model for the liquid-film flow. A stability analysis of this model was performed. Through calculations the wave growth rate of the falling liquid film and a neutral stability curve were obtained. The comparison of the calculation results with those of other models has confirmed that the second-order boundary model offers better prediction effectiveness and its form is more suited for performing further a nonlinear analysis. **Key words**: liquid film, boundary layer, wave, growth rate, neutral stability

后加载技术在极小展弦比叶栅中的应用 = **The Use of Rear-loading Technology in Ultra Low-aspect Ratio Cascades** [刊, 汉] / WANG Yu-zhang, WANG Yong-hong (Institute of Mechanical and Power Engineering under the Shanghai Jiaotong University, Shanghai, China, Post Code: 200030), ZHAO Ya-fang, FENG Zhen-ping (Turbomachine Research Institute under the Xi'an Jiaotong University, Xi'an, China, Post Code: 710049) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2003, 18(1). —86 ~ 88

Through the use of turbine blades with a rear-loaded load profile one can effectively control the formation of secondary flows in the blade passage, reducing secondary-flow losses. Meanwhile, this type of cascades is highly adaptive to a variety of incidence angles, thus significantly enhancing the flow efficiency in a cascade passage. An ultra low-aspect stator cascade with rear-loaded characteristics was designed by using the rear loading technology. The results of numerical analysis and test of the above-mentioned cascade indicate that the latter features a low three-dimensional cascade loss. Moreover, the cascade performance hardly changes with the change of aspect ratios, incidence angles and outlet Mach numbers. **Key words**: rear-loading technology, aspect ratio, secondary flow, cascade test

凝汽器铜管的联合保护研究 = **A Study of the Combined Protection of Steam Condenser Copper Tubes** [刊, 汉] / ZHU Zhi-ping, YANG Dao-wu (Chemistry Department, Changsha Institute of Electric Power, Changsha, China, Post Code: 410047) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2003, 18(1). —89 ~ 92, 96

The corrosion and protection of condenser copper tubes has always been a problem people are keenly concerned with but for which there still lacks a satisfactory solution. The complicated operating conditions of the copper tubes, variegated types of their fabrication material and the increasingly deteriorating quality of cooling water have led to a multitude of corrosion forms. In view of the above the authors have explored a combined protection method for condenser copper tubes.