

# 行星齿轮啮合刚度对其振动特性的影响

王春光, 常 山, 李应生

(哈尔滨·第七〇三研究所, 黑龙江 哈尔滨 150036)

**摘 要:**建立了单级直齿行星齿轮传动多自由度数学模型。在该系统中,根据行星齿轮固有频率和振动模态的特点,推导了特征值对于啮合刚度的敏感度公式及其与啮合应变能之间的关系式。分析结果表明,啮合刚度对两个旋转模态、两组位移模态和两个行星模态的固有特性影响较大;根据啮合应变能分布可以清楚地了解啮合刚度变化对于系统固有特性的影响。

**关 键 词:**行星齿轮;啮合刚度;振动特性

中图分类号:TH132.4 文献标识码:A

## 1 引 言

行星齿轮机构传动比大,结构紧凑,承载能力强,广泛用于船舶、航空等国防领域,国际上对其动力学的研究是近十几年才开始的,国内对此相关领域的研究较少<sup>[1]</sup>。齿轮啮合刚度动态激励是齿轮动力学主要的研究内容之一,作为一种参数激励,当它的激励频率低于系统固有频率时,产生剧烈的振动,影响传动质量<sup>[2]</sup>。对于啮合刚度变化与行星齿轮固有特性的关系,国内的文献中还未见较深入的研究。本文的目的是从单级直齿行星齿轮传动模型出发,并以无阻尼自由振动条件下的振动特性为基础,进行特征值敏感性的推导,找到啮合应变能与特征值敏感度的关系,根据应变能的分布,判断啮合刚度变化对于固有特性的影响。

## 2 计算模型

### 2.1 基本方程

一个单级行星齿轮传动机构如图 1 所示,由一个中心太阳轮(S),一个内齿圈(R),N 个行星轮(P)以及一个行星架(C)组成。系统坐标系如图 2 所示,每个构件有两个位移和一个旋转 3 个自由度,整个行星齿轮有  $L=3(N+3)$  个自由度。选取系统

的广义坐标:

$$X = [ \begin{matrix} x_c, y_c, u_c, & x_r, y_r, u_r, & x_s, y_s, u_s, & \xi_1, \eta_1, u_1, \dots, \\ \text{行星架} & \text{内齿圈} & \text{太阳轮} & \text{行星轮1} \\ \xi_N, \eta_N, u_N, \dots, \end{matrix} ] \quad (1)$$

则系统无阻尼自由振动方程为:

$$M\dot{X} + KX = 0 \quad (2)$$

其中:  $M$ —惯性矩阵;  $K$ —刚度矩阵;  $\{x_h, y_h\}$ ,  $h = c, r, s$ —行星架、内齿圈、太阳

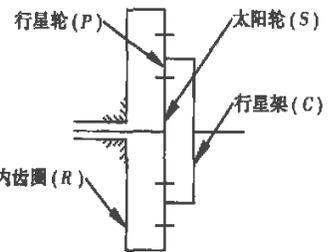


图 1 单级直齿行星齿轮模型

轮的弹性位移;  $\{\xi_n, \eta_n\}$ ,  $n = 1, N$ —第  $n$  个行星轮在切向和法向的弹性位移。  $u_h = \theta_h R_h$ , ( $h = c, r, s, 1, \dots, N$ ) 是旋转坐标系,  $\theta_h$  是构件  $h$  的旋转角,  $R_h$  分别是行星轮圆心到太阳轮圆心的距离, 内齿圈、太阳轮和行星轮的基圆半径。各个坐标系以固定在行星架上的坐标系  $\{o, i, j\}$  为参照系, 并随行星架一起转动。

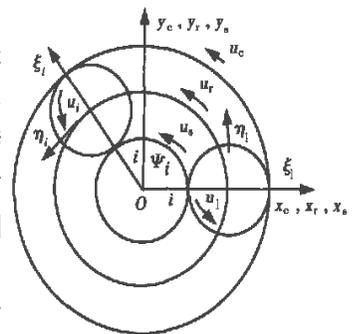


图 2 坐标系示意图

### 2.2 振动特点

式(2)的特征方程为:

$$(K - \lambda_i M) \Phi_i = 0, \quad \lambda_i = \omega_i^2 \quad (3)$$

收稿日期: 2004-09-01; 修订日期: 2005-03-02

作者简介: 王春光(1978-)男, 山东东阿人, 哈尔滨·第七〇三研究所硕士研究生。

式中:  $\omega_i$ —第  $i$  阶振动模态的固有频率;  $\Phi_i$ —振动模态,  $\Phi_i = [P_c, P_r, P_s, P_1, \dots, P_N]$ ;  $P_h = (x_h, y_h, u_h)^T$ , ( $h = c, r, s$ );  $P_n = (\xi_n, \eta_n, u_n)^T$ , ( $n = 1, \dots, N$ ).

当太阳轮与每个行星轮的啮合刚度都相等, 内齿圈与每个行星轮的啮合刚度都相等, 行星轮均布的行星齿轮振动有以下特点<sup>[3]</sup>:

- (1) 固有频率为单值解的旋转模态, 太阳轮、内齿圈和行星架只有旋转, 没有弹性位移。
- (2) 固有频率为重值解的位移模态, 太阳轮、内齿圈和行星架只有弹性位移, 没有旋转。
- (3) 固有频率为  $N-3$  ( $N > 3$ ) 重解的行星模态, 太阳轮、内齿圈和行星架没有弹性位移和旋转, 只有行星轮振动。

### 3 特征值敏感度分析

#### 3.1 旋转模态特征值敏感度

旋转模态特征值对太阳轮—行星轮啮合刚度  $k_{sn}$  和内齿圈—行星轮啮合刚度  $k_{rn}$  的敏感度为<sup>[4]</sup>:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{sn}} = \sum_n^N (\sigma_{sn}^i)^2; \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{rn}} = \sum_n^N (\sigma_{rn}^i)^2; \quad (4)$$

$\sigma_{sn}^i, \sigma_{rn}^i$  分别是在第  $i$  阶振动模态太阳轮与第  $n$  个行星轮啮合和内齿圈与第  $n$  个行星轮啮合沿啮合线方向的弹性变形:

$$\sigma_{sn} = y_s \cos \Psi_{sn} - x_s \sin \Psi_{sn} - \xi_n \cos a_s + u_s + u_n \quad (5)$$

$$\sigma_{rn} = y_r \cos \Psi_{rn} - x_r \sin \Psi_{rn} - \xi_n \cos a_r + \eta_r \text{cpsa}_r + u_r + u_n \quad (6)$$

式中:  $a_s$ —太阳轮的压力角;  $\Psi_{sn}$ —第  $n$  个行星轮的位置角,  $\Psi_{sn} = \Psi_n - a_s$ ;  $a_r$ —内齿圈的压力角,  $\Psi_{rn} = \Psi_n + a_r$ .

#### 3.2 位移模态和行星模态特征值敏感度

当特征解为  $m$  个重值解  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$  时, 设特征解对应的特征向量  $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m]$ , 正则化使  $\Gamma^T M \Gamma = I_{m \times m}$ , 令  $\Phi = \Gamma A$  产生一特征向量  $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m]$ , 其中  $A$  是未知矩阵,  $\Phi_j = \Gamma a_j$ , ( $j = 1, \dots, m$ ),  $a_j$  是  $A$  的第  $j$  列。

求特征方程(3)的一阶导数, 得:

$$(K - \lambda_j M) \Phi_j' = (\lambda_j' M + \lambda_j M' - K') \Gamma a_j = f \quad (7)$$

当特征方程存在  $m$  个特征解时, 满足<sup>[5]</sup>:

$$\lambda_1^T f = \lambda_2^T f = \dots = \lambda_m^T f = 0 \quad (8)$$

此时产生一个  $m \times m$  阶特征方程:

$$D a_j = \lambda_j' a_j, \quad D = \Gamma^T (K' - \lambda_j M') \Gamma \quad (9)$$

可见  $\lambda_j'$  是式(9)的特征值。

位移模态特征值为二重解, 行星模态特征值为  $N-3$  重解, 利用式(9), 得到位移模态和行星模态特征值敏感度公式:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{sp}} = \sum_{n=1}^N (\delta_{sn}^i)^2, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{rp}} = \sum_{n=1}^N (\delta_{rn}^i)^2, \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{sp}} = \sum_{n=1}^N (\delta_{sn}^i)^2, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{rp}} = \sum_{n=1}^N (\delta_{rn}^i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, N-3 \quad (11)$$

#### 3.3 啮合应变能

根据啮合应变能公式  $E = \frac{1}{2} \Phi_i^T K \Phi_i$ , 太阳轮与第  $n$  个行星轮的啮合应变能  $E_{sn}$  和内齿圈与第  $n$  个行星轮的啮合应变能  $E_{rn}$  为:

$$E_{sn} = \frac{1}{2} k_{sn} (\delta_{sn}^i)^2, \quad E_{rn} = \frac{1}{2} k_{rn} (\delta_{rn}^i)^2 \quad (12)$$

由式(4)、式(10)、式(11)和式(12)得到特征值敏感度和啮合应变能的关系为:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{sp}} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N E_{sn}, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{rp}} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N E_{rn} \quad (13)$$

### 4 计算实例及结果分析

利用以上的分析结果, 应用 Matlab 语言编制计算分析程序, 具体流程如图 3 所示。

表 1 是 4 各个行星轮均布内齿圈固定的单级行星齿轮模型参数<sup>[6]</sup>, 应用图 3 的计算程序, 并将表 1 的行星齿轮模型参数代入到该程序中, 得到固有频率, 如表 2 所示。

各阶振动模态的啮合应变能如图 4 所示。

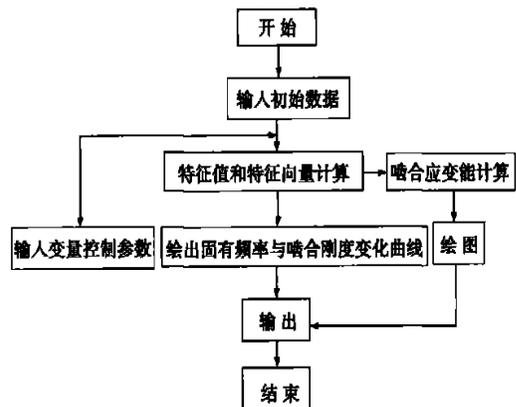


图 3 计算流程图

图4中横坐标1、2、3、4为太阳轮与第n个行星轮的啮合应变能, n=1, 2, 3, 4; 横坐标5、6、7、8为内齿圈与第n个行星轮的啮合应变能, n=1, 2, 3, 4, 纵坐标为各阶振动模式啮合应变能的相对大小。从图中可以看出11阶~13阶, 15阶~18阶振动模式的太阳轮与行星轮的啮合应变能比2阶~10阶和阶14阶振动模式的啮合应变能大; 11阶~17阶振动模式内齿圈与行星轮的啮合应变能比2阶~10阶和18阶的啮合应变能大, 由式

(13)计算可知, 表2的啮合刚度数值对应的敏感度中11阶~13阶, 15阶~18阶振动模式的特征值对于啮合刚度  $k_{sn}$  的敏感度比2阶~10阶和14阶的敏感度高, 11阶~17阶振动模式特征值对于  $k_{sn}$  的敏感度比2阶~10阶和18阶的敏感度高。

表1 行星齿轮模型参数

	太阳轮	内齿圈	行星轮	行星架
质量/kg	4.75	16.92	2.88	39.1
转动惯量/kg·m <sup>2</sup>	2.3×10 <sup>-2</sup>	0.86	8.89×10 <sup>-3</sup>	0.76
齿数	40	106	33	—
啮合刚度/N·m <sup>-1</sup>	$k_{sp}=5\times 10^8; k_{rp}=5\times 10^8$			
扭转刚度/N·m <sup>-1</sup>	0	—	0	—
支撑刚度/N·m <sup>-1</sup>	10 <sup>8</sup>	—	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>
基圆直径/mm	212.9	564.3	175.7	388.6
压力角/(°)	$\alpha_s = \alpha_r = 25^\circ$			

表2 固有频率和振动模式

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
大小	0	316	316	722	736	777	777	899	899
类型	G	T	T	P	R	T	T	T	T
阶数	10	11	12	13	14	15	16	17	18
大小	1435	2223	2992	2992	4560	4516	6889	6889	12493
类型	R	P	T	T	R	P	T	T	R

G: 刚体振动; T: 位移模式; R: 旋转模式; P 行星模式;

图5(a)是各阶振动模式固有频率与  $k_{sn}$  关系曲线, 可以看出  $k_{sn}$  的变化对11阶、15阶行星模式, 12阶、13阶、16阶和17阶位移模式和14阶、18阶旋转模式固有频率的影响比2阶~10阶固有频率的影响大; 图中“——”线与曲线的交点是表2中的固有频率, 可以看出在交点11阶~13阶, 15阶~18阶

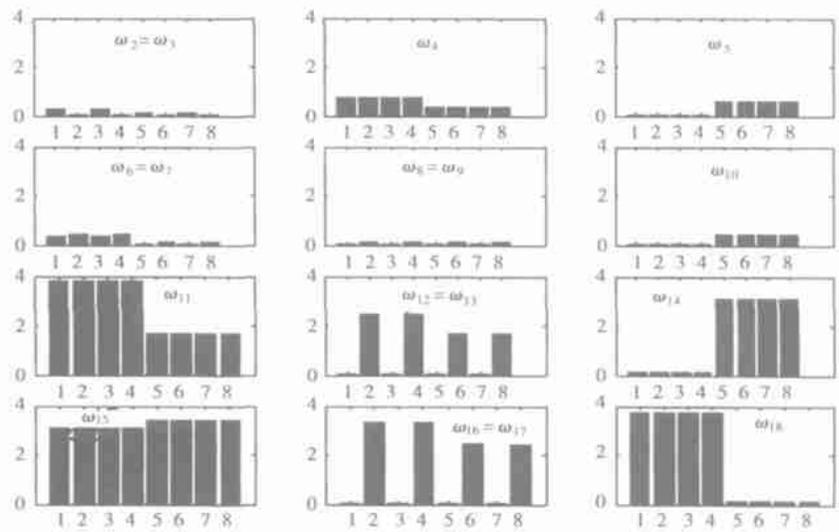


图4 啮合应变能

曲线的斜率比2阶~10阶和14阶曲线的斜率大, 这与通过图4分析得到的各阶振动模式特征值敏感度相对大小所得结论相同。图5(b)是18阶旋转模式在曲线上A, B, C 3点啮合应变能大小, 可以看出随着啮合刚度值的增大, 啮合应变能也增大, 由式(13)得到3点敏感度大小  $A < B < C$ , 因此A, B, C之间曲线有图中所示的形式。

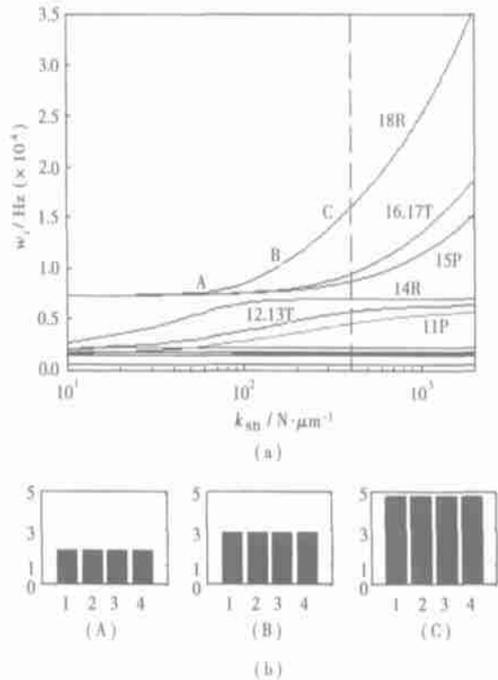


图5 固有频率与  $k_{sn}$  关系曲线  $\omega_i$  (Hz)

(下转第420页)

炉过热蒸汽压力 1.8 MPa, 水位表的可见范围是: ±100 mm, 在主机负荷变化的情况下考察了模糊控制器作用的锅筒水位的变化, 数据见表 1。

表 1 实验数据

主机负荷 扰动	水位正向峰值 /mm	水位负向峰值 /mm	调整时间 /s
增负荷 (+20%)	27.5	-14	120
减负荷 (-20%)	16.5	-17.5	130

研究结果表明, 在给定工况下, 采用本文的控制方案, 系统超调量较小, 在主机负荷扰动下, 水位的波动在水位表的可见范围内。与机组原有的控制系统相比, 新方案在抑制“虚假水位”对控制系统的影响方面优越性较为突出, 变工况时的动态偏差较小。

## 5 结 语

本文针对某型船用蒸汽锅炉锅筒水位控制对象, 提出了模糊前馈反馈的方案, 其控制律由模糊前馈控制、模糊反馈控制和模糊监督控制 3 部分组成, 该方案既可以实现锅炉水位的模糊双冲量控制, 又可以抑制最小相位环节的影响。该方案应用于某实验锅炉锅筒水位控制实验, 验证结果表明该控制方案是可行的, 控制品质满足对船用蒸汽锅炉锅筒水位控制的技术要求。

### 参考文献:

- [ 1 ] PASSION KEVIN M, STEPHEN YURKOWICH. 模糊控制[ M ]. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [ 2 ] 金以慧, 方崇智. 过程控制[ M ]. 北京: 清华大学出版社, 1993.

(上接第 416 页)

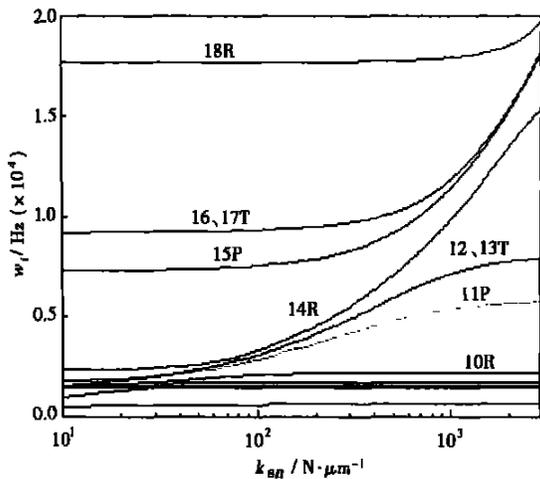


图 6 固有频率与  $k_m$  关系曲线

图 6 是各阶振动模式固有频率与啮合刚度  $k_m$  关系曲线, 从图中可以看出  $k_m$  的变化对 14 阶和 18 阶旋转模式, 12 阶、13 阶、16 阶和 17 阶位移模式, 11 阶和 15 阶行星模式的影响比对其它振动模式的影响大。

## 5 结 论

- (1) 推导出位移模式和行星模式特征值对于太阳轮—行星轮啮合刚度和内齿圈—行星轮啮合刚度的特征值敏感度公式及其与啮合应变能的关系式。
- (2) 计算分析结果表明啮合刚度对高阶振动模式比低阶振动模式的影响大, 这些高阶振动模式包括两个旋转模式、两组位移模式和两个行星模式。

### 参考文献:

- [ 1 ] 杨建明. 行星齿轮机构弹性动力学建模[ J ]. 桂林电子工业学院学报, 2000, 20(2): 48—52.
- [ 2 ] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学—振动·冲击·噪声[ M ]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [ 3 ] LIN J, PARKER R G. Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration[ J ]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1999, 121: 316—321.
- [ 4 ] FRISWELL M L. The derivatives of repeated eigenvalues and their associated eigenvector[ J ]. *Journal of Vibration and Acoustic*, 1996, 118: 390—397.
- [ 5 ] FOX R L, KAPOORM P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors[ J ]. *AIAA Journal*, 1968, 6: 2426—2429.
- [ 6 ] MARK, VALCO J. Planetary gear train ring gear and support structure investigation[ D ]. New York: Cleveland State University, 1992.

network was adopted for network division. The turbulent flow model is of a SST  $k-\omega$  one. A wall function method has been adopted for the near-wall location. The coupling of speed and pressure was solved by using a SIMPLEC algorithm. Through calculations obtained were for the gas film-cooled flat plate without ribs and with 45° ribs a flow field distribution and the average temperature and average heat exchange factor at the flat plate inner and outer surface. The calculation results indicate that the channel flow-field structure of the gas film-cooled flat plate with 45° ribs is relatively complicated. The surface average temperature of the flat plate is lower than that of the gas film-cooled flat plate without ribs. However, the cold and hot surface average heat exchange factor near the gas-film pore zone is higher than in the case when no ribs are provided. Furthermore, the presence of ribs is favorable for enhancing cold-air outward flow ratio. **Key words:** rib, gas film cooling, temperature, heat exchange factor, numerical simulation, outward flow ratio

行星齿轮啮合刚度对其振动特性的影响 = **Impact of Planetary-gear Meshing Rigidity on Its Vibration Characteristics** [刊, 汉] / WANG Chun-guang, CHANG Shan, LI Ying-sheng (Harbin No. 703 Research Institute, Harbin, China, Post Code: 150036) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2005, 20(4). — 414 ~ 416, 420

A multi-freedom mathematical model was set up for a single-stage straight-tooth planetary gear transmission. Within this system, on the basis of the special features of planetary gear natural frequency and vibration mode, deduced were a formula showing the sensibility of an eigenvalue to meshing rigidity and the relationship between this eigenvalue and meshing strain energy. The results of an analysis indicate that the meshing rigidity has a relatively great influence on the intrinsic characteristics of two rotating modes, two groups of displacement mode and two planetary modes. Through the distribution of meshing strain energy one can clearly detect the influence of meshing rigidity changes on the system intrinsic characteristics. **Key words:** planetary gear, meshing rigidity, vibration characteristics

带监督项的模糊前馈反馈控制在船用锅炉水位控制中应用 = **Fuzzy Feedforward and Feedback Control with a Supervision Item and Its Applications** [刊, 汉] / XIAO Hang, CHEN Bing, NI Ning (Teaching & Research Section of Steam Power, Naval Engineering University, Wuhan, China, Post Code: 430033), TIAN Guang (Military Representative Office Resident at Harbin No. 703 Research Institute, Harbin, China, Post Code: 150036) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2005, 20(4). — 417 ~ 420

Because of a "false water level" for the boiler drum, a controlled object in a marine steam power plant and of the difficulty of establishing a precise mathematical model the use of an onventional control strategy often fails to ensure the control quality of the drum water level. In case of high frequency of operating regime changes there often occur such failures as "water overflow" or "boiler dry". To cope with the problem, the authors have proposed a fuzzy feedforward and feedback control scheme with a fuzzy supervision item. Under this control scheme the use of fuzzy feedforward compensation makes it possible to measure the influence of interference to the system output and a fuzzy supervisor is utilized to attenuate the impact caused by a non-minimal relative link. The application of the proposed control scheme on an experimental machine unit has demonstrated its satisfactory results.

电站锅炉安装过程干涉现象的评判方法 = **A Method for Appraising Interference Phenomena during the Hoisting of a Utility Boiler** [刊, 汉] / RUI Xiao-ming, CUI Yan-bin, MA Zhi-yong, (School of Energy & Power Engineering, Key Laboratory of Condition Monitoring and Control for Power Plant Equipment of Ministry of Education, North China Electric Power University, Beijing, China, Post Code: 102206) // Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2005, 20(4). — 421 ~ 424

On the basis of a self-developed practical boiler hoisting construction work involving a rapid model building and data structuring a study was undertaken of the computer appraisal technique with regard to the interference phenomena in the hoisting of a utility boiler, making it possible to accurately judge the interference situation of the structural items to be hoisted and already installed items. The utilization of the above technique can be conducive to effectively enhancing the design quality of boiler hoisting scheme, accelerate installation speed and increase construction work cost-effectiveness. **Key words:** boiler erection, interference analysis, CAD