文章编号: 1001-2060(2005)06-0599-04

边界元解析敏度分析在燃烧室壳体构件优化设计中的应用

张德欣, 安伟光, 刘　刚, 刘　磊
(哈尔滨工程大学 航天工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘　要: 对燃烧室壳体构件进行优化设计, 是改善应力集中状况、防止热变形损伤、提高其承载能力的重要措施。在燃烧室壳体构件优化设计中, 本文建立了轴对称构件的边界元全解析敏度分析技术, 并将该技术与通用的形状优化设计算法相结合, 对燃烧室壳体中的某一平面应力下的构件进行形状优化设计。在优化燃烧室壳体构件时, 用加权求和法处理该构件的多目标问题, 最后获得满意的结果。

关　键　词: 燃烧室壳体; 轴对称; 边界元; 优化设计
中图分类号: O643; TB12　　　文献标识码: A

1　引　言

燃烧室壳体是一个双层壁的轴对称结构, 它承受的热应力最大。内腔与外壁是彼此连接的。燃气压力是燃烧室壳体的基本载荷。该因素将影响燃烧室的总体强度和刚度, 还影响两壁连接件间的局部强度和刚度, 以及各连接件与壁连接的强度。在构件形状优化设计中, 有关敏度分析方面的很多著作是建立在有限元公式基础上的。如 Wang 等人给出了有限元的敏度分析详细评述[2]。对解析方程进行隐含求导, 得到敏度方程; 文献[1] 给出了边界元敏度分析的方程。对轴对称构件, 例如半无限空间等可以寻找特定的基本解, 使其在部分边界上满足边界条件, 这样就不需要在此部分边界上设置边界单元, 使未知数减少, 给求解带来方便。本文对具有两个对称轴的较复杂的二维空间问题进行详细的公式推导。它不仅使问题得到简化, 同时也提高了计算效率, 从而使形状优化设计更加简单, 优化结果更加精确。

本文创建了轴对称构件的边界元解析敏度分析优化算法, 并用该算法优化了燃烧室壳体中的某一构件, 其结果与现有的结果进行比较, 以此来说明本文的正确性。

2　基本理论与公式

以各向同性线性弹性体 Ω 为对象(边界用 Γ 表示)边界积分方程为:

$$c_{lk}^{i}u_{k}^{i}+\int_{\Gamma}P_{lk}^{*}u_{k}\,\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma}u_{lk}^{*}P_{k}\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}u_{lk}^{*}P_{k}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1}$$

其中: $c_{lk}(P')=\frac{1}{4\pi(1-v)}\times$

$$\begin{bmatrix} 4\pi(1-v)-\left\{2(1-\alpha)-\frac{1}{2}SIN2\alpha\right\} & -SIN^{2}\alpha \\ -SIN^{2}\alpha & 4\pi(1-v)-\left\{2(1-\alpha)-\frac{1}{2}SIN2\alpha\right\} \end{bmatrix}$$

$\Gamma=\Gamma_U+\Gamma_P$, Γ_U 是位移边界; Γ_P 是面力边界。

其中: Q、$P\in\Gamma$, $U_{lk}^{*}(P'Q')$是位移基本解; $P_{lk}^{*}(P'Q')$是与 $U_{lk}^{*}(P'Q')$对应的表面力。

对应于平面应力问题的基本解和基本解对应的表面力为:

$$U_{lk}^{*}(P'Q')=\frac{1+v}{4\pi E}\left[(3-v)\ln\frac{1}{r}\delta_{lk}+(1+v)r_{,l}r_{,k}\right] \tag{2}$$

$$P_{lk}^{*}(P'Q')=-\frac{1}{4\pi r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-v)\delta_{lk}+2(1+v)\times r_{,l}r_{,k}\right]-(1-v)(r_{,l}n_{,k}-r_{,k}n_{,l})\right\} \tag{3}$$

其中: E、v—材料弹性模量和泊松比; r—P 点和 Q 点之间的距离。通过 E 和 v 的代换可以得到平面应变问题的基本解。

3　解析敏度分析

在燃烧室壳体中某一构件的优化设计中, 需要目标函数和约束函数的偏导数。对于很多问题, 这些函数大多是由面力和位移数据组成, 由方程[A]

收稿日期: 2004-01-20;　修订日期: 2004-12-22
作者简介: 张德欣(1964-), 男, 山东莱州人, 哈尔滨工程大学副教授.

$\{y\}=\{F\}$解出位移和面力，这些位移和面力可以确定应力，即所谓的应力恢复，由边界上已知的面力和位移得到应力分量。通过应力方程对 X_L 隐含求导，可得到这些应力对第 L 个设计变量的敏度。经过计算可知应力敏度取决于位移、面力和几何参数的敏度。

3.1 位移和面力的敏度

由式(7)对设计变量 X_L 隐含求导，可得未知位移和面力的敏度方程为：

$$[A]\{Y\}_{,L}=\{r\}_{,L}$$

式中：$\{r\}_{,L}=\{F\}_{,L}-[A]_{,L}\{Y\}$；

$\{F\}_{,L}=[M]_{,L}\{Y\}+[M]\{Y\}_{,L}$。

3.2 边界应力敏度分析

在边界 Γ上：

$$\sigma'_{11}=P_1 \tag{4}$$

$$\sigma'_{12}=P_2 \tag{5}$$

$$\sigma'_{22}=\frac{v}{1-v}\sigma'_{11}+\frac{E}{1-v^2}e'_{22} \tag{6}$$

式中：$e'_{22}=\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}u'_2}{\mathrm{d}\xi}\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}u'_2}{\mathrm{d}\xi}J^{-1}$；

$$\frac{\mathrm{d}u'_2}{\mathrm{d}\xi}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}h^i}{\mathrm{d}\xi}U'^{i}_2。$$

通过式(4)~式(6)对 X_L 求导，可得到这些应力对第 L 个设计变量的敏度：

$$\sigma'_{11,L}=P_{1,L}$$

$$\sigma'_{12,L}=P_{2,L}$$

$$\sigma'_{22,L}=\frac{v}{1-v}\sigma'_{11,L}+\frac{E}{1-v^2}e'_{22,L}$$

式中：$e'_{22,L}=J^{-1}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\mathrm{d}h^i}{\mathrm{d}\xi}U'_{2,L}-J^{-2}J_{,L}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\mathrm{d}h^i}{\mathrm{d}\xi}U'_2$；

$$J_{,L}=J^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\xi}\right)_{,L}+\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\xi}\right)_{,L}\right];$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\xi}\right)_{,L}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}h^i}{\mathrm{d}\xi}x^i_{j,L}。$$

3.3 用高斯积分计算下列 4 个积分式

$$h^1_{ij}=\int_{\Gamma_j}\Phi_1P^*\mathrm{d}\Gamma_j=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}(1-\xi)P^*\frac{l_j}{2}\mathrm{d}\xi=$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{l_j}{4}(1-\xi)P^*\mathrm{d}\xi$$

同理：$h^2_{ij}=\int_{-1}^{+1}\dfrac{l_j}{4}(1+\xi)P^*\mathrm{d}\xi$

$$g^1_{ij}=\int_{-1}^{+1}\frac{l_j}{4}(1-\xi)U^*\mathrm{d}\xi$$

$$g^2_{ij}=\int_{-1}^{+1}\frac{l_j}{4}(1+\xi)U^*\mathrm{d}\xi$$

所用积分公式为：

$$\int_{-1}^{+1}f(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{k=1}^{4}W_kf(\xi_k)$$

4 轴对称问题的理论公式

在燃烧室壳体优化设计中，存在轴对称情况。利用它们的轴对称特点，可以寻找一个特殊的基本解，能大大的减少边界单元数，即未知数。这样可以使形状优化设计更加简单。下面对具有两个对称轴的较复杂的二维空间问题进行详细的公式推导：

在 X 轴上：$P_X=0$；$U_Y=0$

在 Y 轴上：$P_Y=0$；$U_X=0$

边界积分方程为：

$$C_{lk}u_k+\left(\int_{\Gamma_{x=0}}u_k\cdot P^*_{lk}+\int_{\Gamma_{y=0}}u_k\cdot P^*_{lk}+\int_{\Gamma-\Gamma_{x=0}-\Gamma_{y=0}}u_k\cdot P^*_{lk}\right)\mathrm{d}\Gamma$$
$$=\left(\int_{\Gamma_{x=0}}P_k\cdot u^*_{lk}+\int_{\Gamma_{y=0}}P_k\cdot u^*_{lk}+\int_{\Gamma-\Gamma_{x=0}-\Gamma_{y=0}}P_k\cdot u^*_{lk}\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{7}$$

将式(3)代入式(7)中得：

$$C_{lk}u_k+\left(\int_{\Gamma_1}u_k\cdot P^*_{lk}+\int_{\Gamma_2}u_k\cdot P^*_{lk}+\int_{\Gamma-\Gamma_1-\Gamma_2}u_k\cdot P^*_{lk}\right)\mathrm{d}\Gamma$$
$$=\left(\int_{\Gamma_1}P_k\cdot u^*_{lk}+\int_{\Gamma_2}P_k\cdot u^*_{lk}+\int_{\Gamma-\Gamma_1-\Gamma_2}P_k\cdot u^*_{lk}\right)\mathrm{d}\Gamma$$

使 Q'在 X 轴上时：$P^*_{lx}=0$，$U^*_{ly}=0$；Q'在 Y 轴上时：$P^*_{ly}=0$，$U^*_{lx}=0$；这样，在对称轴上的积分值为零。图 1 是相对于 X 轴和 Y 轴分别对称，在图 1 上取 4 个点 $P_1(x_p, y_p)$，$P_2(-x_p, y_p)$，$P_3(-x_p, -y_p)$，$P_4(x_p, -y_p)$，它们相对于 X 轴和 Y 轴分别对称。$Q(X, Y)$是图 1 上的任意一点，r_1，r_2，r_3，r_4 表示 Q 点与P_1，P_2，P_3，P_4 点的距离。

$$r_1=\left[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2\right]^{1/2}$$

$$r_2=\left[(x+x_p)^2+(y-y_p)^2\right]^{1/2}$$

$$r_3=\left[(x+x_p)^2+(y+y_p)^2\right]^{1/2}$$

$$r_4=\left[(x-x_p)^2+(y+y_p)^2\right]^{1/2}$$

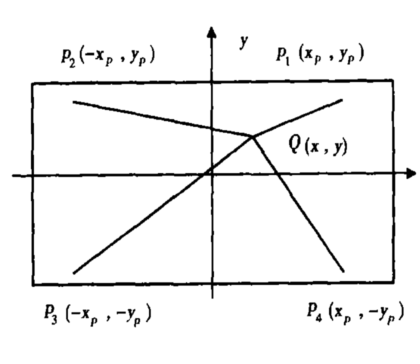

图 1 两 个对称轴的二维空间

（1）当 Q 在 X 轴上时：$r_1=r_4$；$r_2=r_3$；

$L=X, K=Y$ 时：

$$u^*_{xy1}=A\cdot r_{1x}r_{1y}=A\cdot\frac{x-x_p}{r_1}\cdot\frac{-y_p}{r_1}=-A\frac{(x-x_p)\cdot y_p}{r_1^2}$$

同理：$u^*_{xy2}=-A\dfrac{(x+x_p)\cdot y_p}{r_2^2}$

$$u^*_{xy3}=A\frac{(x-x_p)\cdot y_p}{r_3^2}$$

$$u^*_{xy4}=A\frac{(x-x_p)\cdot y_p}{r_4^2}$$

得：$u^*_{xy}=u^*_{xy1}-u^*_{xy2}-u^*_{xy3}+u^*_{xy4}=0$

当 $L=Y, K=Y$ 时，得：

$$u^*_{xy}=u^*_{xy1}-u^*_{xy2}-u^*_{xy3}+u^*_{xy4}=0$$

（2）同理：Q 在 Y 轴上时，$r_1=r_2$；$r_3=r_4$；

当 $L=X, K=X$ 时，得：

$u^*_{xy}=u^*_{xy1}-u^*_{xy2}-u^*_{xy3}+u^*_{xy4}=0$

当 $L=Y, K=X$ 时，得：

$u^*_{yx}=u^*_{yx1}+u^*_{yx2}-u^*_{yx3}+u^*_{yx4}=0$

（3）Q 在 X 轴上时：

$P^*_{1x}=0,\ r_1=r_4,\ r_2=r_3,\ \dfrac{\partial x}{\partial n}=0,\ \dfrac{\partial y}{\partial n}=-1,\ n_x=0,$

$n_y=-1$

当 $L=X, K=X$ 时：

$$P^*_{xx}(P,Q)=\frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)+2(r_x)^2]\right\}$$

$$=-\frac{A}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n}\right)[(1-2\nu)+2(r_x)^2]$$

$$=\frac{A}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}[(1-2\nu)+2(r_x)^2]$$

$$P^*_{xx1}=-A\frac{y_p}{r_1^2}\left[(1-2\nu)+\left(\frac{x-x_p}{r_1}\right)^2\right]$$

$$P^*_{xx2}=-A\frac{y_p}{r_2^2}\left[(1-2\nu)+\left(\frac{x+x_p}{r_2}\right)^2\right]$$

$$P^*_{xx3}=A\frac{y_p}{r_3^2}\left[(1-2\nu)+\left(\frac{x-x_p}{r_3}\right)^2\right]$$

$$P^*_{xx4}=A\frac{y_p}{r_4^2}\left[(1-2\nu)+\left(\frac{x-x_p}{r_4}\right)^2\right]$$

得：$P^*_{xx}=P^*_{xx1}-P^*_{xx2}-P^*_{xx3}+P^*_{xx4}=0$

当 $L=Y, K=X$ 时，得：

$$P^*_{yx}=P^*_{yx1}+P^*_{yx2}-P^*_{yx3}-P^*_{yx4}=0$$

（4）Q 在 Y 轴上；

$P^*_{ly}(P,Q)=0,\ r_1=r_2,\ r_3=r_4,\ \dfrac{\partial y}{\partial n}=0,\ \dfrac{\partial x}{\partial n}=-1,$

$n_y=0,\ n_x=-1$

当 $L=X, K=Y$ 时，

得：$P^*_{xy}=P^*_{xy1}-P^*_{xy2}-P^*_{xy3}+P^*_{xy4}=0$

当 $L=Y, K=Y$ 时，

得：$P^*_{yy}=P^*_{yy1}+P^*_{yy2}-P^*_{yy3}-P^*_{yy4}=0$

（5）总结分析

当 Q 在 X 轴上，$L=X, K=Y$ 时；Q 在 Y 轴上，$L=X, K=X$ 时：

$$u^*_{lk}=u^*_{lk1}-u^*_{lk2}-u^*_{lk3}+u^*_{lk4}=0$$

当 Q 在 X 轴上，$L=Y, K=Y$ 时；Q 在 Y 轴上，$L=Y, K=X$ 时：

$$u^*_{lk}=u^*_{lk1}+u^*_{lk2}-u^*_{lk3}-u^*_{lk4}=0$$

当 Q 在 X 轴上，$L=X, K=X$ 时；Q 在 Y 轴上，$L=X, K=Y$ 时：

$$P^*_{lk}=P^*_{lk1}-P^*_{lk2}-P^*_{lk3}+P^*_{lk4}=0$$

当 Q 在 X 轴上，$L=Y, K=X$ 时；Q 在 Y 轴上，$L=Y, K=Y$ 时：

$$P^*_{lk}=P^*_{lk1}+P^*_{lk2}-P^*_{lk3}-P^*_{lk4}=0$$

最后积分方程式为：

$$C_{lk}(P)u_k(P)+\int_{\Gamma-\Gamma_1-\Gamma_2}u_k(Q)\cdot P^*_{lk}(P,Q)\mathrm{d}\Gamma(Q)$$

$$=\int_{\Gamma-\Gamma_1-\Gamma_2}u^*_{lk}(P,Q)P_k(Q)\cdot\mathrm{d}\Gamma(Q)$$

上式的 $P^*_{lk}(P,Q)$ 和 $u^*_{lk}(P,Q)$ 为满足边界条件的特殊基本解。

5　例题计算

用本文编制的优化程序，对燃烧室壳体某一开孔板件进行了计算。该板件的形状及受力情况如图 2 所示。其中：$P=50$ MPa；$E=200$ GPa；$\nu=0.25$。

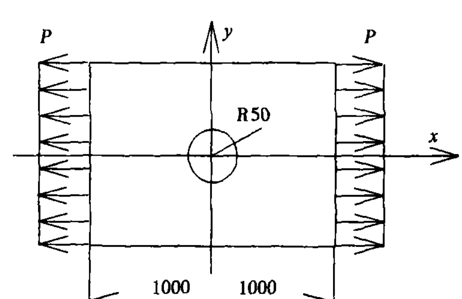

图 2　开孔方板的形状及受力情况

考虑对称性，可取方板的四分之一作为优化模型。边界单元划分如图 3 所示，采用平面线性单元，对该例题进行边界元分析。方板受拉时，边界最大切向应力出现在内孔边界处，此处易出现裂纹。为此，对该例题的内孔形状进行优化，使内孔边界处的最

大切向应力值最小。本文用椭圆曲线来描述内孔边界，选椭圆的两轴为设计变量，即 x_{14} 和 x_9 为设计变量，内孔边界方程为：$\frac{x^2}{x_{14}^2}+\frac{y^2}{y_9^2}=1$

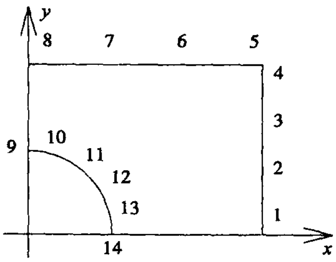

图 3 开孔方板的边界单元划分

考虑在不增加方板重量的情况下，进行形状优化，于是该问题数学模型可以写成：

$$\text{Min: } G(1)=F(X)=\sum_{j=1}^{11}\lambda_j\,|\sigma_t^j(X)|/[\sigma]$$

$$\text{S.t}\quad G(i)=([\sigma]-[\sigma_t^j(X)])/[\sigma]\geqslant 0$$

$$i=2,3,6;\ j=i+5;$$

$$G(7)=1-X(1)/500\geqslant 0$$

$$G(8)=1-X(2)/500\geqslant 0$$

$$G(9)=X(1)\geqslant 0$$

$$G(10)=X(2)\geqslant 0$$

$$G(11)=\pi X(1)X(2)/\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)-1\geqslant 0$$

用本文研制的轴对称解析敏度分析形状优化程序运算了该例题，优化结果如表 1 所示，用解析求敏度的结构形状优化程序也运算了该例题，优化结果如表 2 所示。

表 1 轴对称的解析敏度分析方板开孔优化结果

最终结果			
X(1; 2)＝150.115 800 00	48.712 030 00		
GX(1; 11)＝290.348 600 00	0.591 920 30	0.596 624 10	
	0.634 590 90	0.745 142 090	0.967 751 80
	0.298 521 60	0.531 909 50	150.115 800 0
	48.712 030 00	0.381 142 00	
优化后的剪应力:	81.608 040	80.195 380	
	73.079 830	53.309 830	－4.037 633
分析次数: 224			
敏度分析次数: 35			

表 2 解析敏度分析的方板开孔优化结果

最终结果			
X(1; 2)＝140.615 700 00	46.717 050 00		
GX(1; 11)＝298.338 600 00	0.581 920 30	0.593 623 10	
	0.629 590 90	0.728 420 90	0.974 751 80
	0.296 921 60	0.532 829 50	140.615 700 0
	46.717 050 00	0.375 142 00	
优化后的剪应力:	83.615 940	81.275 380	
	74.081 830	54.315 830	5.049 633
分析次数: 249			
敏度分析次数: 38			

比较表 1 和表 2，得到用轴对称解析敏度分析结构形状优化算法计算的内孔最大切向应力值比用解析求敏度的结构形状优化算法计算的内孔最大切向应力值降低了百分之三，计算时间减少百分之十。

6 结束语

（1）本文研究了燃烧室壳体构件的轴对称解析敏度分析的一般公式，并用该方法编制了计算机程序，优化了一个开孔板件，根据得到的优化结果和现有的结果进行比较，其精度很高。在边界元的敏度分析领域中，可以用近似的解析求敏度的方法，这样在对精度影响不大的情况下，可以减少计算机费用，目前该方法正在研究中。

（2）在燃烧室壳体构件的形状优化设计中，边界元法与有限元法相比，它有很多优点：将边界元法用于结构形状优化设计中，可以使优化问题的维数降低一维，大大减少计算工作量，以及降低计算的复杂程度；它还可以很容易与通用的形状优化算法相结合，为此它有很好的发展前景。

参考文献：

[1] 张德欣. 形状优化的全解析敏度分析[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1193－1200.

[2] WANG S, SUN Y, GALLIAGHER R H. Sensitivity analysis in shape opptimization of continuum structures[J]. **Comp and Struct**, 1985, **20**(5): 855－867.

[3] 刘洪秋, 夏人伟. 一种新的形状灵敏度分析方法——具有两类变量的伴随方程法[J]. 计算结构力学及其应用, 1993, **10**(1): 7－14.

边界元解析敏度分析在燃烧室壳体构件优化设计中的应用＝**The Use of Boundary-element Analytic Sensibility Analysis in the Optimized Design of Combustor-casing Structural Members** [刊，汉] /ZHANG De-xin，AN Wei-guang，LIU Gang，et al（Department of Astronautical Engineering，Harbin Engineering University，Harbin，China，Post Code：150001）//Journal of Engineering for Thermal Energy &Power. — 2005，20（6）. —599～602

The optimized design of combustor-casing structural members can serve as an important measure for improving stress concentration conditions，preventing thermal deformation-related damages and enhancing their load-bearing ability. During the optimized design of these structural members the authors have employed the technology of boundary-element analytic sensibility analysis for axisymmetric members and combined this technology with the general algorithm of shape optimization design. On this basis a shape optimized design was conducted for combustor-casing structural members being subjected to a plane stress. In optimizing combustor-casing structural members a multi-objective problem was tackled by using a weighted summation method，and satisfactory results were finally achieved. **Key words**：combustor casing，axisymmetry，boundary element，optimization design

轴流压气机多叶片排的气动优化设计＝**Optimized Aerodynamic Design of Multi-blade Rows of an Axial Compressor**[刊，汉] /YU Han，YUAN Xin（Department of Thermal Energy Engineering，Tsinghua University，Beijing，China，Post Code：100084）//Journal of Engineering for Thermal Energy &Power. — 2005，20（6）. —603～606

An aerodynamic design optimization of the radial-stacked version of the first three rows of blades was conducted for a multi-stage axial compressor. With commercial software iSIGHT serving as a platform an experimental design method was used for the above version to conduct a preliminary exploration of the whole space being searched，adopting a secondary programming algorithm of consecutive series for localized optimization search. Furthermore，commercial software NUMECA was utilized to make a numerical evaluation of the viscous flow field. Calculations of the compressor performance under all operating conditions indicate that without a decrease in flow rate and pressure ratio the blade profile after the optimization will undergo a performance improvement under both design and off-design operating conditions. **Key words**：axial compressor，blade，design of experiment，sequential quadratic programming，optimization

高压比跨音速离心叶轮的三维叶片型线优化＝**Three-dimensional Blade Profile Optimization for a High Pressure-ratio Transonic and Centrifugal Impeller**[刊，汉] /MA Sheng-yuan，CHEN Ying（Harbin No. 703 Research Institute，Harbin，China，Post Code：150036），YANG Ke，et al（Fluid Engineering Technology Co. Ltd.，Beijing，China，Post Code：100081）//Journal of Engineering for Thermal Energy &Power. — 2005，20（6）. —607～610

With the help of software Fine/Design3D and a CFD（computational fluid dynamics）method the optimization design of a three-dimensional blade profile was carried out for a high pressure-ratio transonic and centrifugal impeller. The optimization results in an efficiency enhancement of 1.05％ with a simultaneous increase in pressure ratio and flow rate. From an analysis of geometric changes it has been found that relative to root and average-diameter section blade profile the blade-tip profile optimization is a more effective means for enhancing the efficiency of the transonic and centrifugal impeller. **Key words**：centrifugal impeller，computational fluid dynamics，high pressure-ratio，transonic