文章编号:1001-2060(2008)02-0135-05

## 一种离心压缩机叶片优化设计方法

舒信伟,谷传纲,王 彤,杨 波 (上海交通大学机械与动力工程学院,上海 200030)

摘 要: 针对叶轮机械数值优化过程中常常需要大量耗时的 CFD计算,发展了一种基于近似模型的优化设计方法。该方 法的核心是一佣于建立样本点几何信息与其性能之间的近 似模型的样本数据库。将该优化方法应用于某离心压缩机叶 片优化设计,以极大化等熵效率为目标函数,在保证流量和总 压比不减小的情况下,优化后叶轮的等熵效率提高了 2.7%, 优化后的叶片型线变得更平直,且顶部型线变化较根部明显。

关键 词: 压缩机; 优化设计; 叶片; 近似模型

中图分类号: TH452 文献标识码: A

引 言

高性能离心压缩机叶片设计是一项复杂工作, 提高性能、降低研发和制造成本的市场竞争压力迫 使工程师们不断研发出更高效、更快捷的设计方法。 传统上,缩短设计周期,提高设计效率主要依赖于工 程师丰富的设计经验,但由于大多数工程师仅精通 几种叶型的设计,很难找到有着所有叶型设计经验 的工程师。所幸的是,近年来计算机模拟技术在诸 如计算流体动力学、结构动力学和热分析等领域取 得了巨大进步,以及性能优良的优化算法的出现,使 得将 CFD 技术与优化算法相结合进行叶型优化成 为可能。

目前应用于叶轮机械优化设计的优化算法有很 *多*,有基于梯度或灵敏度分析方法或最近发展起来 的伴随矩阵法、模拟退火法、控制理论、神经网络法、 响应面法、反设计法以及遗传算法等等<sup>1-9</sup>。一般 说来,很难判定哪种方法一定优于其它方法。就寻 优过程的收敛速度来说,基于梯度法是很快的,但它 不能保证搜索到的解是全局最优的;然而,遗传算法 可以大大提高搜索到全局最优解的概率,但可能需 要几千次的寻优迭代。也就是说,上述方法都有其 优点和不足,每种方法可能只适合一种特定的使用 场合,而不能适用于所有的领域。 叶轮机械气动性能的计算成本很高,主要表现 三维 Navier-Stokes 方程求解很费时,因此优化设计 方法必须要使优化过程中所需的数值求解次数控制 在一个可以接受的范围之内,而且优化的目标函数 要较初始值有一定程度的提高。

本文将均匀设计<sup>[10]</sup>、CFD 技术、并行人工神经 网络(Artificial Neural Network, ANN)与动态小生境等 级公平竞争遗传算法(Hierarchical Fair Competition Genetic Algorithms with Dynamic Niche, HFCDN-GAs)相 结合,发展了一种基于近似模型的离心压缩机叶片 优化设计方法,该方法的核心是一个用于建立样本 点几何信息与其性能之间的近似模型的样本数据 库。均匀设计以"均匀分散"的原则,以较少的试验 点(相对于正交设计等方法)较全面地描述设计空 间;CFD 技术则被利用于对由均匀设计产生的样本 点进行性能评估分析;并行人工神经网络用于建立 样本点的几何信息与其性能之间的近似模型;遗传 算法则对该近似模型进行全局寻优,并将其计算得 到的相应结果加入样本点集中,重复最后两步,直到 满足设定的终止准则。

1 叶型参数化

本文的研究对象是某带分流叶片的离心压缩机 叶轮叶片,优化目的是通过改变叶片形状提高其性 能。通常叶片是由其轮盘侧和轮盖侧的两个截面而 形成一个直纹曲面,两个截面上对应的型值点通过 直线连接。为缩小优化变量空间和较好地表达叶 型,将叶型保角变换到如图1所示的 Blace-to-blace 平面,采用具有保凸性和光滑性的 Bezier 曲线以中 弧线加上一个厚度分布的方式进行叶型参数化。两 条长叶片的中弧线都用6阶 Bezier 曲线进行参数化 表示,短叶片的中弧线的变化情况与长叶片对应部 分相同。具体 Bezier 曲线表达为:

收稿日期: 2007-04-28; 修订日期: 2007-08-20

基金项目: 国家 863 专项经费基金资助项目(2006AA05Z250)

作者简介:舒信传 1978元》是c浙江衢州入。止海交通大常博士研究由ishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(1)

$$Q = \sum_{j=0}^{6} P_{j}B_{6j}(t)$$
  
式中: 向量 $Q \{x(t), y(t)\}^{T}$ 一中弧线上的型

式中: 向量 $Q\{x(t), y(t)\}^{T}$ 一中弧线上的型值点坐标,  $t \in [0, 1]$ ; 向量  $P_{j}\{\hat{s}_{j}, \eta_{j}\}^{T}$ —Bezier 曲线特征多 边形的顶点坐标; 上标 T一转置。6 阶的 Bernstein 多 项式的表达式为:

$$B_{6,j} = C_6^j t^j (1-t)^{n-j} (j=0, 1, ..., 6)$$
(2)

为减少设计变量的个数,固定 Bezier 曲线特征 多边形控制点的横坐标,选其纵坐标为设计变量。 几何约束条件为 Bezier 曲线特征多边形控制点的变 化范围。



图1 叶型中弧线参数化(Hub 截面)

2 均匀设计及样本点生成

如前所述,叶轮机械气动性能的计算成本很高, 因此设计空间中样本点的分布对其预测能力有很大 的影响。为减少试验误差的影响,改善设计空间的 表达,首先要进行试验设计,合理地选择设计变量及 设计空间样本点的分布。考虑到优化设计周期,本 次设计采用均匀设计来生成样本点,其具体构造方 法如下:

(1) 给定试验数 n,寻找比 n 小的整数 h,且使
 n 和 h 的最大公约数为 1。将符合这样条件的正整
 数生成一个向量 h=(h<sub>1</sub>, h<sub>2</sub>, ..., h<sub>m</sub>)。

(2) 均匀设计表的第 j 列由同余运算规律生成:

$$u_{ij} = ih_j (\text{mod}\,n) \tag{3}$$

式中: (mod *n*)就是同余运算, 若 *ih*; 超过 *n*, 则用它 减去 *n* 的一个适当的倍数, 使其差落在[1, *n*] 之中。

采用 CFD 技术对由均匀设计表生成的样本点 进行性能分析,由于描述流动的 Navier-Stokes 方程 是复杂的非线性方程,因此设计变量与目标函数之 间呈高度非线性关系。要对这种关系进行近似描述,具有强非线性映射能力的人工神经网络是一个 不错的选择。China Academia Journal Electronia But

## 3 并行神经网络模型

神经网络模型是以神经元的数学模型为基础来 描述的,由网络拓扑、节点特点和学习规则来表示。 由于人工神经网络有着较强的非线性模型逼近能力 等优点,在设计过程中得到广泛的应用。对于本文离 心压缩机优化设计等类似问题,网络的输出是多个 的。虽然可以用一个网络来映射多个输出,但不难想 象其训练的难度大大增大,从而可能造成训练时误差 的收敛速度变得缓慢,甚至无法收敛。因此,本文提 出并行神经网络的思想,即对于同一个输入向量,用 多个具有相同或不同的拓扑结构和不同的权值矩阵 的单元网络映射多个非线性输出,其中每个单元网络 映射一个输出,其拓扑结构如图2所示。本次设计单 元网络采用3层 BP 网络,传递函数分别为双极性 Signoid 函数和线性函数,学习算法采用共轭梯度反 向传播算法,单元网络的拓扑结构如图3所示。







图 3 单元神经网络的拓扑结构

单元网络的学习误差 ε 定义为输出层的均方 差,其表达式为:

不错的选择。在这些小学: 1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net  $\varepsilon = (F_2(\sum_{j=1}^{k} W_j F_1(\sum_{i=1}^{m} W_{ji} d_i - b_1(j)) - b_2) - a)^2$  (4) 式中:  $F_1, F_2$  - 隐层和输出层的传递函数;  $d_i, a$  - 学 习样本的输出值和其正确的输出值;  $W_{ji}, W_j$  - 网络 的权值系数;  $b_1(j), b_2$  - 隐层和输出层的偏置; m, k - 输入层和隐层神经元的数量。

由于 BP 网络的 Sigmoid 传递函数是可微的,因 此极小化误差函数可以通过基于梯度的算法来实 现。虽然最徒下降 BP 算法的误差函数是沿着梯度 最陡下降方向修正权值和阈值的,且误差减小的速 度是最快的,但收敛的速度不一定是最快的。在共 轭梯度算法中,误差函数沿着共轭的方向进行搜索, 使其收敛速度比最徒下降梯度方向的收敛速度更 快。本文采用的共轭梯度算法的迭代步骤如下:

第一次迭代是沿着最陡梯度下降方向进行搜索 的:

p(0) = -g(0)

然后,决定最佳距离的线性搜索沿着当前搜索 的方向进行:

 $x(k+1) = x(k) + \alpha p(k)$   $p(k) = -g(k) + \beta(k)p(k-1)$  (5) 式中: p(k) -第 k+1 次迭代的搜索方向,从式(5) 可以看出,它由第 k 次迭代的梯度和搜索方向共同 决定; 计算系数  $\beta(k)$ 采用由 Fletcher R 和 Reeves C M 提出的 Fletcher-Reeves 算法进行修正<sup>[11]</sup>,系数  $\beta$ (k)定义为:

$$\beta(k) = \frac{\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{g}(k)}{\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{g}(k-1)}$$
(6)

这种共轭梯度算法所需的存储空间要比普通算 法略多一些,但由于其收敛速度较快,常用于连接权 的数量很多的场合。

4 HFCDN-GAs

为避免基本遗传算法存在的早熟或陷入停滞现 象等问题,受自然界和人类社会进化现象的启发,发 展了一种新的遗传算法——动态小生境等级公平竞 争遗传算法 HFCDN-GAs。该算法引入等级公平竞 争 HFC (Hierarchical Fair Competition)模型<sup>[12]</sup>,有效地 保证了竞争的公平性并防止过早收敛;将动态小生 境进化思想和自适应的进化策略引入 HFC 模型,可 以提高算法的搜索效率,有效保持种群的多样性,防 止算法出现停滞和早熟现象;为了保证每一代的优 良个体不被破坏,采用精英保持策略,使它们直接复 制到下一代中。 规模为 N 的种群; 然后进行个体适应度评价, 并按 适应度大小进行排序分成 N<sub>g</sub> 组子种群; 接着对各 子种群分别进行交叉和变异遗传操作; 经过 N<sub>e</sub> 代 的进化后, 把所有的子种群进行合并, 并对这个新种 群进行交叉和变异遗传操作, 再应用动态小生境技 术对种群进行筛选, 这样当前的子代演化成下一代 父代。如此一代代进化下去, 逐渐演化出越来越好 的个体, 直至满足设定的收敛条件。

为测试本文发展的 HFCDN-GAs 优化模型寻优性 能和健壮性,选取二元多峰值 Shubert 函数作测试,寻 求其最大值。Shubert 函数的数学模型可表述为:

$$\max f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{5} (k \cos(k+1)x_1 + k) \times \sum_{k=1}^{5} (k \cos(k+1)x_2 + k)$$
(7)  
s. t.  $-2 \leq x_1, x_2 \leq 2$ 



图4 Shubert函数图



图 5 测试函数进化历程

从图 4 可以看出, 在寻求该测试函数最大值的 过程中极易陷入局部最优值。应用给出的优化算

21994-2016As的程序流程为;首先随机生成一个blish法。将秧群规模设置为。40。常规交叉和变异概率分

别为 0.8 和 0.05,在不同的初始种群的情况下进行 了 5 次寻优试验,其寻优过程如图 5 所示。由图 5 可见,该优化算法可以较快得找到全局最优值,同时 也显示了其有着很强的健壮性。

## 5 优化过程及结果分析

流量、压比和效率等参数是离心压缩机的主要 性能指标,本次设计把极大化等熵效率作为目标函 数,以参数化的叶片中弧线 Bezier 曲线特征多边形 控制点在小范围变化,流量和总压比不小于初始叶 轮为约束条件,约束条件的处理采用罚函数法,优化 设计的表达式为:

 $\max F_{obj} = \eta_{Isen} + P_{Geom} + P_{Perf}$  (8) 式中:  $F_{Obj}$ 一优化设计的目标函数;  $\eta_{Isen}$ 一离心压缩 机的等熵效率;  $P_{Geom}$ 、 $P_{Perf}$ 一几何和性能的惩罚项。

优化的流程如图 6 所示。首先对用 Bezier 函数 对叶型进行参数化,得到设计变量;接着根据设计变 量的数量和均匀设计的执行原理,选用表  $U_{37}(37^{12})$ 来生成初始的 37 个设计空间样本点;样本点的性能 评估采用 FINE/Turbo 软件求解来完成,湍流模型选



图6 优化流程图

用 Spalart-A Ilmaras 模型,采用多重网格、局部时间步 长和残差光顺技术以获得较快的收敛速度;样本点 的几何信息与其性能之间的近似模型采用并行神经 网络来实现;HFCDN-GAs 则对该近似模型进行全局 寻优,并将其计算得到的相应结果加入样本点集中, 循环最后两步迭代直到满足设定的终止准则,得到 本次的优化对象是某带分流叶片的离心压缩机 叶轮,计算得到的初始等熵效率较低,为 81.2%。 图 7 比较了优化前后叶片分别在轮盘侧和轮盖侧的 投影截面上的形状。优化叶型在轮盘侧向长叶片压 力面方向移动,在轮盖侧长叶片前缘处向吸力面方 向微小移动,不过叶片中部及后缘部分还是向长叶 片压力面方向移动,而且移动的相对幅度较轮盘侧 型线大,短叶片变化情况与长叶片相应位置一致。 因此,优化叶型总体上是向长叶片压力面方向移动, 使叶片变得更平直,顶部型线变化较根部明显,且喉 部通流面积增大,更适合跨音速流动。



图 7 优化前后叶型比较

图 8 给出了优化前后叶片在 50%叶高处的压 力系数分布云图。通过对比,发现优化后的云图在 长短叶片的前缘处的压力系数有了一定的提高,得 到了一个更平缓的压力分布,这对于减小流动损失 是有帮助的。

图 9 比较了优化前后叶轮出口 50% 叶高处的 总压系数分布,可以清楚地看出优化后叶轮的总压 系数总体上得到了一定的提高,且分布更为光滑。 优化后叶轮的等熵效率为 83.9%,比初始的提高了 2.7%,同时保证流量和压比不低于初始叶轮。

优化结果2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



(b) 优化叶片







## 结 6 论

将叶型参数化、试验设计方法、并行神经网络、 HFCDN-GAs 和 CFD 等技术相结合,发展了一种基于

思想和基于共轭梯度算法的神经网络相结合,发展 了一种并行神经网络,加快了网络训练时误差的收 敛速度和提高了网络的映射精度。典型的测试函数 寻优结果表明, HFCDN-GAs 有着良好的全局寻优能 力。从优化过程可以看出,相对短的优化设计周期 要归功于由映射效率较高的并行神经网络给出的样 本点的几何信息与其性能之间的近似模型,它同时 又给全局寻优能力较强的 HFCDN – GAs 的有效应 用提供了便利。该方法可以很好地处理几何和气动 等方面的目标函数及相应的约束条件,适于多设计 变量的优化设计问题。

将该优化设计方法应用于某带分流叶片的离心 叶轮优化设计,其结果表明,优化叶轮在满足约束条 件的前提下,优化目标函数提高了2.7%,优化后的 叶片型线变得更平直,且顶部型线变化较根部明显。 参考文献:

- [1] STEPHANE BURGUBURU, CLEMENT TOUSSAINT, CHRISTOPHE BONHOMME, et al. Numerical optimization of turbomachinery bladings[J]. Journal of Turbomachinery, 2004, 126: 91-100.
- A RENSA K, RENTROPA P, STOLLB S O, et al. An adjoint approach [2] to optimal design of turbine blades[J]. Applied Numerical Mathematics, 2005, 53:93-105.
- WANG X J, DAMODARAN M. Aerodynamic shape optimization using [3] computational fluid dynamics and parallel simulated annealing algorithms[ R] . AIAA Paper 2000-4847, 2000.
- [4] GUCG, MIAOYM. Blade design of axial-flow compressors by the method of optimal control theory. I: physical model and mathematical expression [J]. Trans ASME J of Turbomachinery, 1987, 109(1); 99-102.
- GU C G, MIAO Y M. Blade design of axial-flow compressors by the [5] method of optimal control theory. II: application of pontryagin' s maximum principles, a sample calculation and its results[ J] . Trans ASME J of Turbomachinery, 1987, 109(1): 103-107.
- PIERRET S. VAN DEN BRAEM BUSSCHE R A. Turbom achine rv blade [6] design using a navier-stokes solver and artificial neural network [J]. ASME Journal of Turbomachinery, 1999, 121: 326-332.
- 谷传纲, 阎日方, 王 彤. 采用改进的 BP 神经网络预测离心通 [7] 风机性能的研究[]]. 西安交通大学学报, 1999, 33(3): 43-47.
- [8] 王晓锋,席 光,王尚锦.离心压缩机叶轮的响应面优化设计 I: 设计方法[J]. 工程热物理学报, 2004, 25(3): 408-410.
- [9] TRIGG M A, TUBBY G R, SHEARD A G. Automatic genetic optimization approach to two dimensional blade profile design for steam turbines J. Journal of Turbomachinery, 1999, 121:11-17.
- 方开泰. 均匀设计一数论方法在试验设计的应用[J]. 应用数 [ 10] 学学报,1980,3(4):363-372.
- FLETCHER R, REEVES C. Function minimization by conjugate gradi-[ 11] ents[ J] . Computer Journal, 1964, 7: 149-154.
- [ 12] HU J J, GOODMAN ERIK D, SEO KISUNG, et al. Adaptive hierarchical fair competition(AHFC) model for parallel evolutionary algorithms //Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference [C]. New York: Morgan Kaufmann Publishers, 2002. 772-779.

近似模型的离心压缩机叶片优化设计方法。把并行 Justice Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.ne

伟)

a RBF (Radical Based Function) neural network model. The results of comparison show that the calculation model based on the support vector regression is capable of not only accurately calculating the main steam flow rate at different operating conditions, but also adapting itself to the above calculation during a change of the turbine flow path. It also boasts a relatively good generalization ability and stability, and is suitable for on-line calculations, thus meeting the requirements for real-time diagnosis and calculation of the cost-effectiveness of a power plant. **Key words:** main steam flow rate, vectorsupported machine, regression, steam turbine, soft-measurement

汽轮机转子二维温度场在线仿真模型建立=A Study of the On-line Simulation Model for Two-dimensional Temperature Fields of a Steam Turbine Rotor[刊,汉]/LIU Yan-feng, HAO Run-tian, GAO Jian-qiang (College of Energy Source and Power Engineering, North China Electric Power University, Baoding, China, Post Code: 071003)//Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2008, 23(2).—127~130

Under the support of an integrated modular modeling system (IMMS), developed was a general-purpose simulation algorithm based on a finite element model for two-dimensional temperature fields of steam turbine rotors. Furthermore, an online simulation model for such fields was also established by using an engineering modular modeling method, thus facilitating the modification of the steam turbine rotor and its meshing geometrical dimensions. A comparison of the simulation test with the two-dimensional analytic results under the same conditions shows that the simulation model thus established enjoys a variety of merits, such as high calculation accuracy and speed as well as great versatility, etc. Meanwhile, the model in question can also be applied for a thermal-state analysis of axially-symmetrical structures with similar boundary conditions. **Key words:** integrated modular modeling, development platform, steam turbine rotor, two-dimensional temperature field, on-line, simulation model

加装短叶片离心叶轮的参数优化及实验研究=Parameter Optimization and Experimental Study of a Centrifugal Impeller with Additionally Installed Splitter Blades[刊,汉] / LU Yu-kun, WANG Jian, ZHANG Jian, et al (College of Energy Source and Power Engineering, North China Electric Power University, Baoding, China, Post Code: 071003)// Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2008, 23(2). — 131 ~ 134

Through a three-dimensional numerical simulation and flow analysis of the impeller inner flow fields of a Model G4-73No. 8D centrifugal fan by using software NUMECA, it has been found that there exists a conspicuous jet flow-wake flow configuration at the outlet of the impeller. To mitigate the adverse effect of the above configuration on fan performance, a numerical simulation has been performed of the fan impeller with additionally installed splitter blades. The optimized parameters of the splitter blades have been determined, depending on the flow field improvement inside the impeller. On this basis, a contrast test of the fan performance has been conducted. The results show that the total pressure of the retrofitted fan rises conspicuously with the efficiency at a rated load operating condition being somewhat enhanced and the high-efficiency zone widened by a small margin. **Key words:** centrifugal fan, jet flow-wake flow, short splitter blade, numerical simulation, experimental study

一种离心压缩机叶片优化设计方法=A Method for the Optimized Design of Centrifugal Compressor Blades [刊,汉]/SHU Xin-wei, GU Chuan-gang, WANG Tong, et al (College of Mechanical and Power Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, China, Post Code: 200030)// Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. — 2008, 23(2), 1-135~139 (1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net In the light of the huge amount of time-consuming CFD (computational fluid dynamics) calculations during the numerical optimization of a turbo-machinery unit, developed was an optimized design method based on an approximate model. The keystone of the method under discussion consists of a sample database used for establishing an approximate model between the sample-point-based geometrical information and its performance. The optimization method has been applied to the optimized design of centrifugal compressor blades. With a maximized isentropic efficiency serving as an objective function and under the condition of keeping the flow rate and total pressure ratio not being decreased, the isentropic efficiency of the impeller has been increased by 2.7% after the optimization. Moreover, the optimized blade profile became more straight and flat, and the blade tip profile underwent a more conspicuous change than that of the blade hub profile. **Key words:** compressor, optimized design, blade, approximate model

考虑主蒸汽压力变化的机组一次调频动态特性= Dynamic Characteristics of the Primary Frequency Modulation of a Turbo-generator under a Due Consideration of Main Steam Pressure Variation[刊,汉] / LIU Xiao-qiang (Automation Control Center, Shanghai Steam Turbine Co. Ltd., Shanghai, China, Post Code: 200240), WANG Xi-tian (Department of Electrical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, China, Post Code: 200240)// Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. -2008, 23(2). -140~143

During the study of dynamic characteristics of primary frequency modulation it is usually supposed that the boiler in a power plant has sufficient large heat-storage capacity to keep main steam pressure constant and its flow rate in direct proportion to the valve opening degree. In practice, however, the boiler heat-storage capacity is always limited. When the heat stored in the boiler is used up or the main steam pressure charges with the valve opening degree, the primary frequency modulation will be somewhat affected. The authors have established a model showing the influence of main steam pressure charge on the primary frequency modulation characteristics of a turbo-generator unit, and conducted a simulation analysis respectively in the frequency and time domains. The research results show that the characteristics in question have a relatively small difference in the high frequency band, but a conspicuous one in the low frequency band. An excessively small low-frequency gain may evidently result from the primary frequency modulation output power leading to a deviation. As a result, such a phenomenon as the falling of primary-frequency modulation output power leading to a deviation from the ideal design performance may occur after a certain period of time. To enhance the frequency modulation performance, it is necessary to rationally configure the CCS (coordinated control system) and coordinate the primary and secondary frequency modulation. **Key words:** turbo-generator, primary frequency modulation, dynamic characteristics, main steam pressure

基于改进型不变线矩特征的机组轴心轨迹形状自动识别=Automatic Identification of Plant Axial Trajectory Shapes Based on Improved Invariant Linear-moment Characteristics [刊,汉] / WAN Shu-ting (Education Ministry Key Laboratory on Power Plant Equipment Condition Monitoring and Control, College of Mechanical Engineering, North China Electric Power University, Baoding, China, Post Code: 071003), WU Bing-sheng (College of Electro-mechanical Engineering, Hebei Engineering University, Handan, China, Post Code: 056038)// Journal of Engineering for Thermal Enegy &Power. - 2008, 23(2). - 144~147

Presented was an improved invariant linear-moment algorithm with a detailed mathematical expression and a demonstration process featuring an invariance that satisfies plant movement, rotation, elongation and compression, Furthermore, a novel