

边界热源随时间变化的融化问题的数值模拟

曲良辉¹, 邢琳¹, 于志云¹, 令锋²

(1. 中原工学院 理学院, 河南 郑州 450007; 2. 肇庆学院 数学与统计学院, 广东 肇庆 526061)

摘要: 根据定时间步长方法的思想, 通过考虑移动界面每次向前推进固定距离时所需要的时间, 构造了定空间步长方法, 用来求解边界热源随时间变化的一维单相融化问题。数值模拟了3种不同边界热源条件下相变过程中移动界面的运动和介质内温度场的分布, 并对不同边界热源条件下的相变特点进行了分析。通过对数值结果的分析可知, 应用定空间步长和定时间步长2种方法数值求解边界热源随时间变化的一维融化问题都是可行的, 并且都具有较高的精度。

关键词: 融化; 相变; 移动界面; 温度; 数值模拟

中图分类号: TK124 文献标识码: A

DOI:10.16146/j.cnki.rndlgc.2015.05.010

引言

自然界和工程实践中存在许多伴有相变的传热问题, 如冰的融化、金属铸件的凝固、食品的冷冻、高温塑料熔体的冷却固化和冻土层的融化等, 这类问题通常称为移动界面问题或 Stefan 问题, 其特点是区域内存在着一个随时间运动的两相界面, 在该界面上吸收或放出热量。此类问题的数学模型是一个具有初始边界值条件的抛物型偏微分方程组, 求解时不仅要考虑区域内温度场的变化, 而且还要分析移动界面位置的运动规律, 但由于移动界面的未知位置和界面上能量守恒条件的非线性性质, 只有一些特殊情况才能获得解析解, 一般情况只能用近似方法或数值方法求解^[1-2], 常见的数值方法有热平衡积分法、焓法、结点积分法、摄动法和水平集法等^[3-7]。数值方法求解 Stefan 问题时, 一是直接构造数值方法求解 Stefan 问题的移动区域模型^[8]; 二是应用空间坐标变换, 把移动区域模型转化为固定区域模型后进行求解^[9]。对于 Stefan 问题的移动区域模型, 由于移动界面的运动导致相变区域的大小

在不断变化, 因此同时取定时间步长和空间步长应用有限差分方法进行计算会比较困难。文献[10]中考虑在固定的时间步长间隔内移动界面每次向前推进的距离, 通过取定时间步长构造了定时间步长方法。基于定时间步长方法的思想, 本研究首先考虑移动界面每次向前推进固定距离时所需要的时间, 通过取定空间步长构造了一种定空间步长方法, 并分析其截断误差; 然后, 应用定空间步长方法和改进的定时间步长方法数值求解了3种不同边界热源随时间变化的纯物质的融化问题, 研究相变过程中移动界面的运动和介质内温度场的分布, 并对不同边界热源条件下的相变特点进行了分析, 数值实验结果论证了两种方法求解边界条件随时间变化的 Stefan 问题的可行性, 为两种方法的应用和推广提供了参考。

1 融化问题的数学模型

一维单相融化问题的无量纲化描述为^[11]:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad 0 < x < R(t) \quad (1)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = -Ste \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \quad x = R(t) \quad (2)$$

满足的初始边界条件为:

$$T(x, t) = 0 \quad x \geq R(t) \quad (3)$$

$$T(0, t) = f(t) \quad t > 0 \quad (4)$$

$$R(t) = 0 \quad t = 0 \quad (5)$$

式中: $T(x, t)$ —温度; x —空间坐标; t —时间; $R(t)$ —移动界面的位置; Ste —斯蒂芬数, $Ste = (C\Delta T_{ref})/l$; C —液相的比热容; l —相变潜热; ΔT_{ref} —参考温度差。

收稿日期: 2015-03-07; 修订日期: 2015-03-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41271076); 河南省基础与前沿技术研究计划项目(142300410251、142300410355); 郑州市普通科技攻关项目(121PPTGG363-11)

作者简介: 曲良辉(1979-), 男, 河南南阳人, 中原工学院讲师。

1.1 定空间步长方法的构造

记移动界面每次向前推进的距离为定长 Δx , 已知移动界面位于 $R_j = j\Delta x$ 所对应的时间为 t_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) 其中 $t_0 = 0$ 。考虑移动界面移动到 $R_N = N\Delta x$ 处所对应的时间 t_N ,此时各节点 $R_j = j\Delta x$ 处的液相介质的温度记为 T_j^N ($j = 0, 1, \dots, N$) 。

假设 $\frac{\partial^4 T(x, t)}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2}$, $\frac{d^2 R(t)}{dt^2}$ 连续, 在节

点 (x_j, t_N) 处用二阶中心差分格式离散空间导数项, 用向后差分格式离散时间导数项, 则

$$\frac{\partial^2 T(x_j, t_N)}{\partial x^2} = \frac{\delta_x^2 T(x_j, t_N)}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 T(\xi, t_N)}{\partial x^4} (\Delta x)^2 \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(x_j, t_N)}{\partial t} = \frac{\Delta_{-t} T(x_j, t_N)}{\Delta t_{N-1}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T(x_j, \eta)}{\partial t^2} \Delta t_{N-1} \quad (7)$$

式中: $x_j = j\Delta x$, $\Delta t_{N-1} = t_N - t_{N-1}$, $\xi \in (x_j - \Delta x, x_j + \Delta x)$, $\eta \in (t_{N-1}, t_N)$ 。

将上述两式代入式(1)并令 T_j^N 替换 $T(x_j, t_N)$, 整理后得到微分方程(1)的离散格式为:

$$\frac{1}{\Delta x} T_{j-1}^N - \left(\frac{2}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta t_{N-1}} \right) T_j^N + \frac{1}{\Delta x} T_{j+1}^N = - \frac{\Delta x}{\Delta t_{N-1}} T_j^{N-1} \quad (8)$$

其局部截断误差为:

$$E_1(x_j, t_N) = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 T(\xi, t_N)}{\partial x^4} (\Delta x)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T(x_j, \eta)}{\partial t^2} \Delta t_{N-1} \quad (9)$$

记 $C_1 = \max\{ \frac{1}{12} \max | \frac{\partial^4 T(x, t)}{\partial x^4} | ,$

$\frac{1}{2} \max | \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} | \}$ 则有

$$| E_1(x_j, t_N) | \leq C_1 [(\Delta x)^2 + \Delta t_{N-1}] \quad (10)$$

在节点 (x_N, t_N) 处考虑微分方程(2), 由于

$$\frac{dR(t_N)}{dt} = \frac{\Delta_{-t} R(t_N)}{\Delta t_{N-1}} + \frac{1}{2} \frac{d^2 R(\eta_1)}{dt^2} \Delta t_{N-1} \quad (11)$$

$$\frac{\partial T(x_N, t_N)}{\partial x} = \frac{T(x_{N-2}, t_N) - 4T(x_{N-1}, t_N) + 3T(x_N, t_N)}{2\Delta x} -$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^3 T(\xi_1, t_N)}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + \frac{2}{3} \frac{\partial^3 T(\xi_2, t_N)}{\partial x^3} (\Delta x)^2 \quad (12)$$

故将上述两式代入式(2), 整理后得到微分方

程(2)的离散格式为:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t_{N-1}} = - Ste \frac{T_{N-2}^N - 4T_{N-1}^N + 3T_N^N}{2\Delta x} \quad (13)$$

其局部截断误差为:

$$E_2(x_N, t_N) = \left[\frac{Ste}{3} \frac{\partial^3 T(\xi_1, t_N)}{\partial x^3} (\Delta x)^2 - \frac{2Ste}{3} \frac{\partial^3 T(\xi_2, t_N)}{\partial x^3} (\Delta x)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{d^2 R(\eta_1)}{dt^2} \Delta t_{N-1} \quad (14)$$

其中, $\eta_1 \in (t_{N-1}, t_N)$, $\xi_1 \in (x_{N-1}, x_N)$, $\xi_2 \in (x_{N-2}, x_N)$ 。

记 $C_2 = \max\{ Ste \cdot \max | \frac{\partial^3 T(x, t)}{\partial x^3} | ,$

$\frac{1}{2} \max | \frac{d^2 R(t)}{dt^2} | \}$ 则有

$$| E_2(x_N, t_N) | \leq C_2 [(\Delta x)^2 + \Delta t_{N-1}] \quad (15)$$

由此可知, 定空间步长差分方法的局部截断误差为 $O [(\Delta x)^2 + \Delta t_{N-1}]$, 即关于空间步长是二阶的, 关于时间步长是一阶的。

记 $a = 1/\Delta x$, $b = \Delta x/\Delta t_{N-1}$, 则微分方程组(1) - (5)的定空间步长差分格式为:

$$a T_{j-1}^N - (2a + b) T_j^N + a T_{j+1}^N = - b T_j^{N-1} (j = 1, 2, \dots, N-1) \quad (16)$$

$$b = - Ste \frac{T_{N-2}^N - 4T_{N-1}^N + 3T_N^N}{2\Delta x} \quad (17)$$

$$T_N^N = 0 \quad (18)$$

$$T_0^N = f(t_N) \quad (19)$$

$$R(t_0) = R_0 = 0 \quad (20)$$

1.2 定时间步长方法的构造

记在 $t_j = j\Delta t$ 时移动界面的位置为 R_j ($j = 0, 1, 2, \dots, L$) , Δt 为时间步长。考虑移动界面在定时间步长 Δt 内向前推进的距离, 则从时刻 $t_{N-1} = (N-1)\Delta t$ 到达时刻 $t_N = N\Delta t$ 时, 移动界面的位置向前推进了 $\Delta x_{N-1} = R_N - R_{N-1}$ ($N = 1, 2, \dots, L$) , 此时各节点 R_j 处的液相介质的温度记为 T_j^N ($j = 0, 1, \dots, N$) 。应用向后差商离散温度对时间的一阶偏导数和非等距的 Lagrange 三点插值公式离散温度对空间变量的二阶偏导数, 则微分方程(1)与方程(2)的离散形式为:

$$\frac{2\Delta x_j T_{j-1}^N - 2(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) T_j^N + 2\Delta x_{j-1} T_{j+1}^N}{\Delta x_{j-1} \Delta x_j (\Delta x_{j-1} + \Delta x_j)} = \frac{T_j^N - T_{j-1}^{N-1}}{\Delta t} (j = 1, 2, \dots, N-1) \quad (21)$$

$$\frac{\Delta x_{N-1}}{\Delta t} = - Ste \frac{(\Delta x_{N-1})^2 T_{N-2}^N - (\Delta x_{N-2} + \Delta x_{N-1})^2 T_{N-1}^N + \Delta x_{N-2} (\Delta x_{N-2} + 2\Delta x_{N-1}) T_N^N}{\Delta x_{N-2} \Delta x_{N-1} (\Delta x_{N-2} + \Delta x_{N-1})} \quad (22)$$

记 $c_j = \Delta x_{j-1} \Delta x_j$, $d_j = \Delta x_{j-1} + \Delta x_j$, 则上述两式可变换为:

$$2\Delta t \Delta x_j T_{j-1}^N - (2\Delta t d_j + c_j d_j) T_j^N + 2\Delta t \Delta x_{j-1} T_{j+1}^N = -c_j d_j T_j^{N-1} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1) \quad (23)$$

$$\Delta x_{N-1} = -\Delta t \cdot Ste \frac{(d_{N-1} - \Delta x_{N-2})^2 T_{N-2}^N - (d_{N-1})^2 T_{N-1}^N + \Delta x_{N-2} (2d_{N-1} - \Delta x_{N-2}) T_N^N}{c_{N-1} d_{N-1}} \quad (24)$$

边界条件的离散格式分别为:

$$T_N^N = 0 \quad (25)$$

$$T_0^N = f(t_N) = f(N\Delta t) \quad (26)$$

$$R(t_0) = R_0 = 0 \quad (27)$$

式(23) - 式(27)即为微分方程(1) - 方程(5)

的定时间步长差分格式。

度的变化非常显著,特别是在固定边界附近。当移动界面推进到 $R(t) = 3.0$ 时,相变区域内液态介质的温差大约为 19;而当移动界面推进到 $R(t) = 5.0$ 时,相变区域内液态介质的温差几乎达到 147(曲线与纵轴的交点),特别在靠近固定边界的前半段相变区域内温度变化非常显著。

2 数值结果与讨论

分别应用定空间步长和定时间步长两种差分方法数值求解 3 种边界热源随时间变化的一维融化问题,对两种差分方法的精度进行分析和比较,并数值模拟相变区域内移动界面的运动和温度场的变化。

2.1 边界热源满足 $f(t) = \exp(t) - 1$ 的情况

考虑边界热源满足 $T(x=0, t) = f(t) = \exp(t) - 1$ 情况下纯物质的融化问题。在此边界热源条件下,当 $Ste = 1.0$ 时,微分方程(1) - 方程(5)还存在精确解,其解为^[11]:

$$T(x, t) = \exp(t - x) - 1 \quad (28)$$

$$R(t) = t \quad (29)$$

图 1(a) 为 $Ste = 0.2, 1.0$ 和 5.0 3 种情况下应用定空间步长方法和定时间步长方法所得到的移动界面位置随时间变化的运动曲线,图 1(b) 为 Ste (斯坦数) = 1.0 情况下,当移动界面分别推进到 $R(t) = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ 和 5.0 时,应用定空间步长方法和定时间步长方法所得到的相变区域内温度的变化曲线。从图 1(a) 和图 1(b) 中可以看出,应用两种数值差分方法分别得到的移动界面的运动曲线与相变区域内温度的变化曲线都吻合得非常好。此外,图 1(a) 还显示在边界条件相同的情况下,移动界面随时间的运动比较有规律,即随着时间的增加,移动界面随时间的运动几乎呈现线性变化关系,也就是移动界面向前推进的速度几乎保持不变。图 1(b) 显示在移动界面向前推进的过程中,相变区域内温

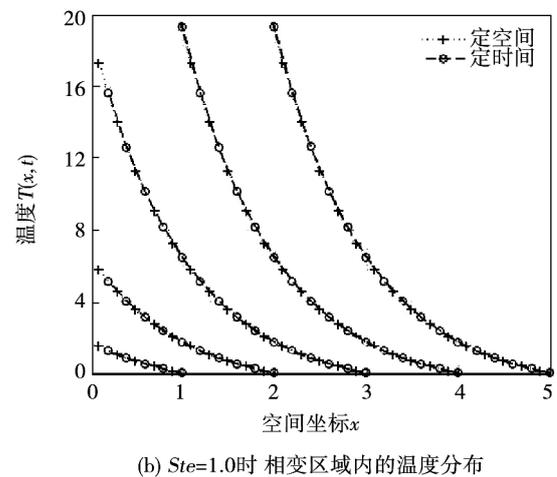
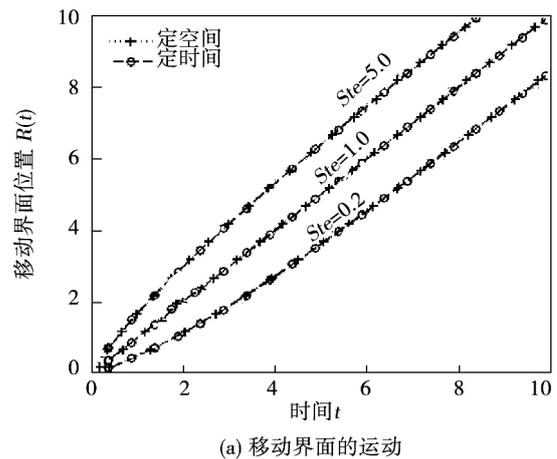
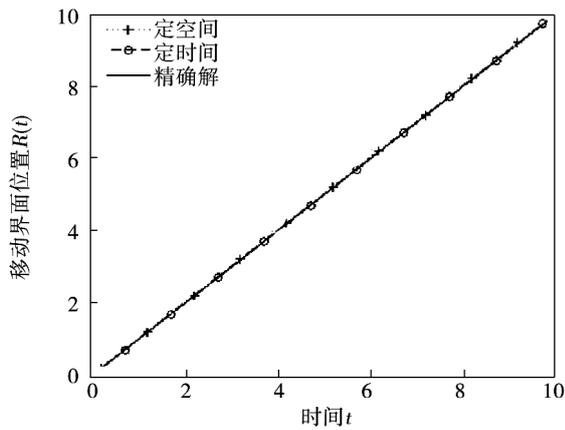


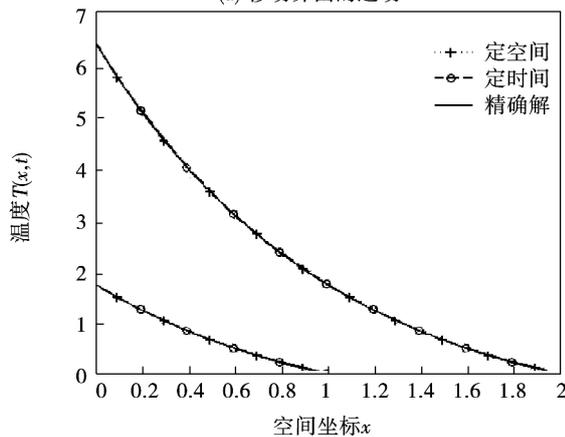
图 1 移动界面的运动和相变区域内的温度分布
Fig. 1 Motions of the moving boundary and temperature distributions in the phase changing zone

图 2 比较了 $Ste = 1.0$ 情况下移动界面的运动

与相变区域内温度分布的精确解曲线和应用定空间步长与定时间步长两种数值方法得到的数值模拟曲线。从图中可以看出,应用两种数值方法得到的曲线和对应的精确解曲线三者都吻合得非常好。表 1 详细给出了在 $Ste = 1.0$ 的情况下,由两种数值方法计算所得到的 18 个不同时刻处移动界面的位置,其中定空间步长方法所采用的空间步长固定为 $\Delta x = 0.01$,定时间步长方法所采用的时间步长固定为 $\Delta t = 0.01$ 。



(a) 移动界面的运动



(b) 相变区域内的温度分布

图 2 在 $Ste = 1.0$ 时移动界面的运动和相变区域内温度分布的精确解与数值解的比较

Fig. 2 Comparisons between the exact solutions and numerical solutions for the motion of the moving boundary and temperature distributions in the phase changing zone when $Ste = 1.0$

从表 1 可以看出,在 $Ste = 1.0$ 情况下,定空间步长和定时间步长两种方法所得到的移动界面的位置在保留 4 位小数的条件下几乎相同。当计算到 t

$= 10.0$ 时,两种方法所得到的移动界面的位置均为 $R(t) = 10.0201$,与精确解相比,其绝对误差为 0.0201 ,相对误差约为 0.20% 。由此可知,两种数值方法所得到的结果都具有较高的精度,从而表明了这两种数值方法的可行性和有效性。

表 1 在 $Ste = 1.0$ 时移动界面位置的精确解与数值解的比较

Tab. 1 Comparisons between the exact solutions and numerical solutions in the position of the moving boundary when $Ste = 1.0$

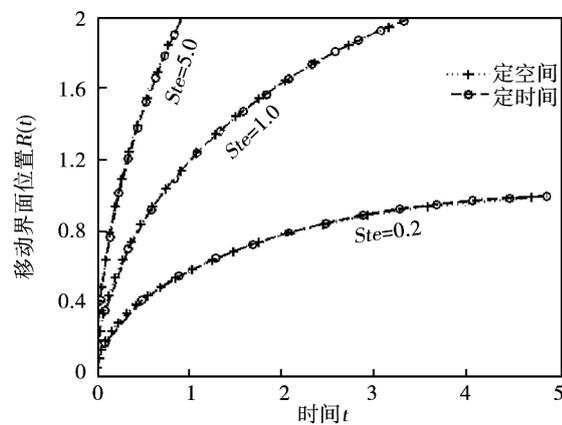
时间 t	精确解	定空间步长 / 相对误差	定时间步长 / 相对误差
0.5	0.500 0	0.500 2 / 0.04%	0.500 2 / 0.04%
1.0	1.000 0	1.000 6 / 0.06%	1.000 6 / 0.06%
1.5	1.500 0	1.501 3 / 0.09%	1.501 3 / 0.09%
2.0	2.000 0	2.002 0 / 0.10%	2.002 0 / 0.10%
2.5	2.500 0	2.502 9 / 0.12%	2.502 9 / 0.12%
3.0	3.000 0	3.003 8 / 0.13%	3.003 8 / 0.13%
3.5	3.500 0	3.504 9 / 0.14%	3.504 9 / 0.14%
4.0	4.000 0	4.005 9 / 0.15%	4.005 9 / 0.15%
4.5	4.500 0	4.507 0 / 0.16%	4.507 0 / 0.16%
5.0	5.000 0	5.008 1 / 0.16%	5.008 1 / 0.16%
5.5	5.500 0	5.509 3 / 0.17%	5.509 3 / 0.17%
6.0	6.000 0	6.010 4 / 0.17%	6.010 4 / 0.17%
6.5	6.500 0	6.511 6 / 0.18%	6.511 6 / 0.18%
7.0	7.000 0	7.012 8 / 0.18%	7.012 8 / 0.18%
7.5	7.500 0	7.514 0 / 0.19%	7.514 0 / 0.19%
8.0	8.000 0	8.015 2 / 0.19%	8.015 2 / 0.19%
9.0	9.000 0	9.017 6 / 0.20%	9.017 7 / 0.20%
10.0	10.000 0	10.020 1 / 0.20%	10.020 1 / 0.20%

2.2 边界热源满足 $f(t) = 1 - 0.2t$ 的情况

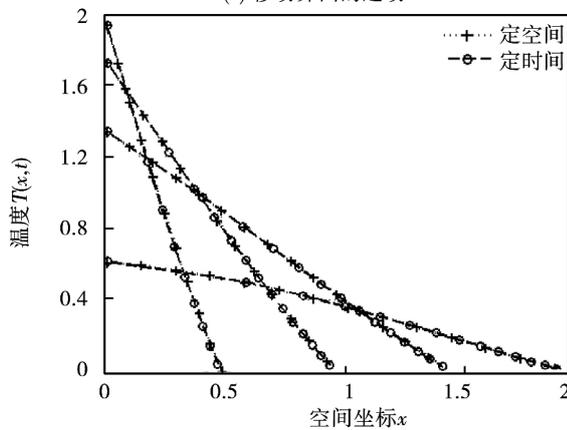
考虑边界条件满足 $T(x = 0, t) = f(t) = 1 - 0.2t$ 情况下纯物质的融化问题。图 3(a) 为 $Ste = 0.2, 1.0$ 和 5.0 3 种情况下应用定空间步长方法和定时间步长方法所得到的移动界面位置随时间变化的运动曲线,和图 3(b) 为 $Ste = 1.0$ 情况下当移动界面分别向前移动到 $R(t) = 0.5, 1.0, 1.5$ 和 2.0 时应用定空间步长方法和定时间步长方法所得到的相变区域内温度的变化曲线。

从图 3 中可以看出,应用两种数值差分方法分别得到的移动界面的运动曲线与相变区域内温度的变化曲线都吻合得非常好。由图 3(a) 可知,在边界

条件相同的情况下,移动界面随时间的运动与 Ste 数的大小密切相关, Ste 数越大,移动界面向前运动的速度也越大,其位置也越远。而图 3(b) 中,在 $Ste = 1.0$ 的情况下,相变区域内的温度分布几乎呈现线性递减的变化趋势,这是线性变化的边界条件对其影响的结果。此外,在 $Ste = 0.2, 1.0$ 和 5.0 3 种情况下,表 2 对定空间步长和定时间步长两种方法所得到的某些时刻处移动界面的位置与文献 [12-13] 中的相应结果进行了比较,其中定空间步长方法所采用的空间步长固定为 $\Delta x = 0.01$,定时间步长方法所采用的时间步长固定为 $\Delta t = 0.01$ 。从表 2 可以看出,在 Ste 数相同的条件下,两种方法所得的结果与文献 [12-13] 中的相应结果相差不大,尤其是在 Ste 数比较小的情况下,这也表明了定空间步长和定时间步长两种数值方法的可行性和有效性。



(a) 移动界面的运动



(b) $Ste=1.0$ 时相变区域内的温度分布

图 3 移动界面的运动和相变区域内的温度分布

Fig. 3 Motions of the moving boundary and temperature distributions in the phase changing zone

表 2 4 种不同方法得到的移动界面位置的对比

Tab. 2 Comparisons of the positions of the moving boundary by four different measured methods

Ste	时间 t	移动界面位置			
		定空间步长	定时间步长	耦合积分方程 ^[12]	热平衡积分 ^[13]
0.2	0.442 5	0.394 0	0.395 4	0.402 7	0.400 0
0.2	0.709 4	0.493 7	0.495 8	0.503 7	0.500 0
0.2	1.057 0	0.593 3	0.595 9	0.604 8	0.599 8
0.2	1.508 0	0.692 9	0.696 3	0.706 2	0.699 6
0.2	2.103 0	0.792 1	0.796 4	0.807 9	0.799 0
0.2	2.951 0	0.890 7	0.896 4	0.910 4	0.897 8
1.0	0.104 0	0.392 2	0.387 4	0.407 1	0.397 3
1.0	0.163 4	0.492 1	0.487 0	0.509 6	0.497 1
1.0	0.236 7	0.592 1	0.587 2	0.612 4	0.597 0
1.0	0.324 2	0.692 0	0.687 5	0.715 4	0.696 7
1.0	0.426 5	0.791 9	0.787 8	0.818 8	0.796 5
1.0	0.544 2	0.891 7	0.888 2	0.922 7	0.896 4
5.0	0.034 9	0.388 9	0.392 3	0.394 6	0.370 6
5.0	0.054 9	0.489 2	0.484 1	0.494 9	0.464 4
5.0	0.079 3	0.589 1	0.579 7	0.595 4	0.558 4
5.0	0.108 3	0.689 3	0.677 2	0.696 4	0.652 3
5.0	0.141 8	0.789 2	0.775 8	0.797 8	0.746 4
5.0	0.179 9	0.889 2	0.875 1	0.899 7	0.840 8

2.3 边界热源满足 $f(t) = 1 + \varepsilon \sin(\omega t)$ 的情况

考虑边界热源满足周期性变化 $T(x=0, t) = f(t) = 1 + \varepsilon \sin(\omega t)$ 情况下纯物质的融化问题,其中边界热源振荡的振幅为 ε ,频率为 ω 。图 4 为不同振幅下当 $Ste = 0.2, 1.0$ 和 2.0 时应用定空间步长方法和定时间步长方法所得到的移动界面位置随时间变化的运动曲线,其中图 4(a) 和图 4(b) 所对应周期振荡的边界热源的振幅分别为 $\varepsilon = 0.5$ 和 $\varepsilon = 0.9$,频率均为 $\omega = \pi/2$ 。可以看出,对同一周期振荡边界热源的振幅,两种数值差分方法所得到的移动界面的运动曲线都吻合得非常好。此外,在边界条件相同的情况下,移动界面随时间的运动与 Ste 数的大小密切相关。在某一相同的时刻, Ste 数越大,移动界面向前运动的速度也越大,其位置也越远。另一方面,周期振荡的边界热源在最初开始的一段时间内对移动界面的运动产生较大的影响,并且边界热源的振幅越大,移动界面运动曲线的振荡

现象也越显著;而经过一段时间之后,边界热源的振幅几乎对移动界面的运动不产生影响。

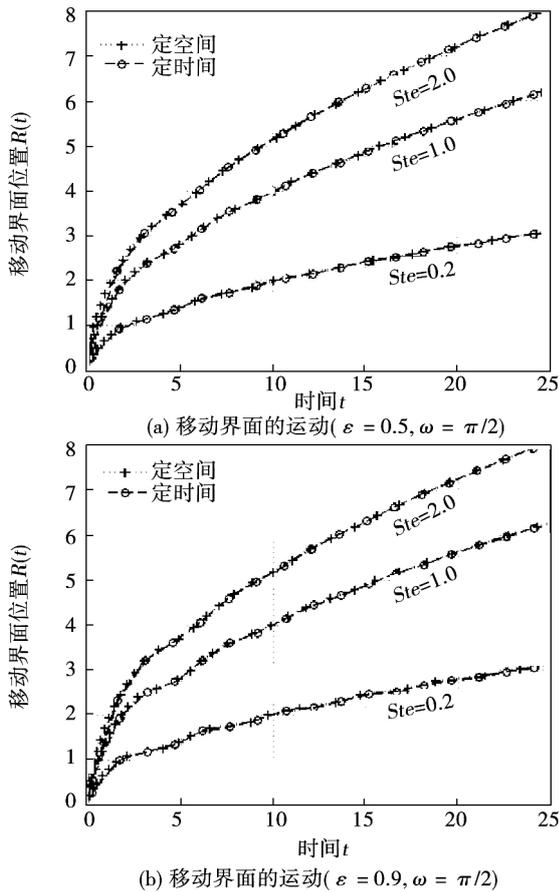


图 4 振幅不同时移动界面的运动
Fig. 4 Motions of the moving boundary with different amplitudes

图 5 为不同振幅、 $Ste = 1.0$ 和振荡热源的频率 $\omega = \pi/2$ 的情况下,当移动界面分别推进到 $R(t) = 2.0, 4.0, 6.0, 8.0$ 和 10.0 时,应用定空间步长方法和定时间步长方法所得到的相变区域内温度的变化曲线,其中图 5 (a) 和图 5 (b) 所对应周期振荡的边界热源的振幅分别为 $\varepsilon = 0.5$ 和 $\varepsilon = 0.9$ 。对同一周期振荡的边界热源的振幅,两种数值方法所得到的温度变化曲线都吻合得非常好;对于不同的振荡振幅都有在相变区域内的温度只在固定边界附近区域内的变化比较剧烈,而在靠近移动界面附近区域内的温度变化比较平缓,几乎呈现线性递减的变化趋势。

图 6 为在振荡热源频率 $\omega = \pi/10, \pi/2$ 和 $\pi/3$ 种情况下应用定空间步长方法(图 6 (a)) 和定时间

步长方法(图 6 (b)) 所得到的移动界面位置随时间变化的运动曲线,这里取 $Ste = 0.2$ 和振荡热源的振幅 $\varepsilon = 0.9$ 。通过对比分析图 6 (a) 和图 6 (b) 可知,两种数值方法在不同振荡频率下所对应得到的移动界面的运动曲线仍然吻合得非常好;频率对移动界面的运动呈现周期性的影响,且频率越小影响越大。在振荡频率为 $\omega = \pi/2$ 和 π 这两种情况下移动界面的位置变化相差不大,而在频率为 $\omega = \pi/10$ 这种情况下,移动界面的位置变化与前两种情况有较大的差别,但每隔一段时间,3 种情况下移动界面的位置就周期性地吻合在一起。通过观察发现,所经过的这段时间正好与频率 $\omega = \pi/10$ 所对应的周期一致,这说明在时长为 20 的一个时间段内,这 3 个不同的振荡频率对移动界面运动所产生的影响相当。

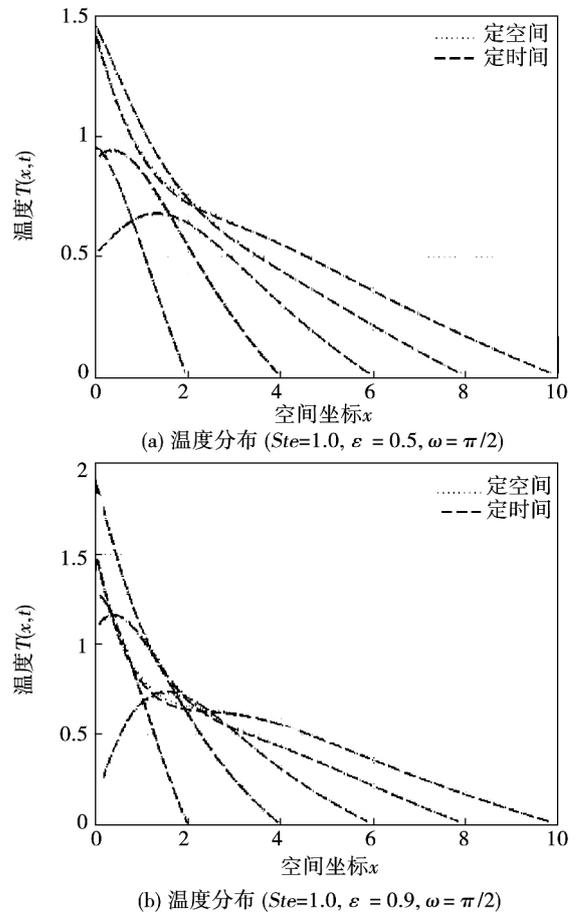


图 5 振幅不同时相变区域内的温度分布
Fig. 5 Temperature distributions in the phase changing zone with different amplitudes

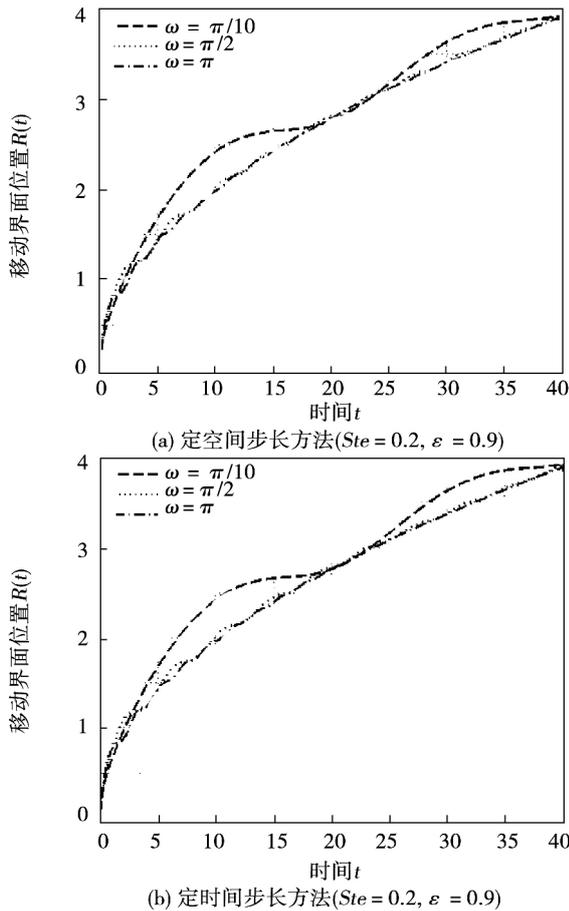


图 6 频率不同时移动界面的运动
Fig. 6 Motions of the moving boundary with different frequencies

3 结 论

(1) 应用这两种数值方法求解 3 种边界热源随时间变化的一维融化问题时, 纯物质在相变过程中移动边界的运动曲线及介质内温度场的分布曲线都吻合得非常好, 表明了两种数值方法的可行性和有效性。

(2) Ste 数的大小对移动界面的位置有显著的影响。对于 3 种随时间变化的边界热源, 移动界面的运动与 Ste 数的大小有关。在某一相同时刻, Ste 数越大, 移动界面向前运动的速度也越大, 其位置就越远。

(3) 热源只对其附近相变区域内的温度影响较大。对于 3 种随时间变化的边界热源在移动界面向前推进的过程中, 相变区域内的温度在热源附近区域内的变化比较剧烈, 而在靠近移动界面附近区域

内的变化比较平缓, 呈现线性递减的变化趋势。

(4) 对周期变化的边界热源, 其振幅对移动界面的运动在最初一段时间内影响较大, 并且振幅越大, 移动界面运动曲线的振荡现象越显著。经过一段时间之后, 振幅的大小几乎对移动界面的运动不产生影响; 而其频率对移动界面的运动呈现周期性的影响, 且频率越小影响越大。

参考文献:

- [1] Kushwaha M S. An approximate approach for a Stefan problem with periodic boundary condition [J]. Journal of Engineering Computers & Applied Sciences 2012, 1(1): 66 - 73.
- [2] QU Liang-hui, XING Lin, YU Zhi-yun, et al. An approximate method for solving a melting problem with periodic boundary conditions [J]. Thermal Science 2014, 18(5): 1679 - 1684.
- [3] Mitchell S L, Myers T G. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer 2010, 53(17): 3540 - 3551.
- [4] Caldwell J, Kwan YY. Spherical solidification by the enthalpy method and heat balance integral method [J]. Advanced Computational Methods in Heat Transfer VII 2002: 165 - 174.
- [5] Rizwan-Uddin. A nodal method for phase change moving boundary problems [J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 1999, 11(3-4): 211 - 221.
- [6] Caldwell J, Kwan Y Y. On the perturbation method for the Stefan problem with time-dependent boundary conditions [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer 2003, 46(8): 1497 - 1501.
- [7] Tan L, Zabaras N. A level set simulation of dendritic solidification of multi-component alloys [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 221(1): 9 - 40.
- [8] Ahmed S G. A new algorithm for moving boundary problems subject to periodic boundary conditions [J]. Int J Numer Meth Heat Fluid Flow 2006, 16(1): 18 - 27.
- [9] Ramos J I. Exponential numerical methods for one-dimensional one-phase Stefan problems [J]. Arch Appl Mech 2005, 74: 664 - 678.
- [10] 吴兆春. 定时间步长变坐标步长差分求解单相 Stefan 问题 [J]. 计算物理 2003, 20(6): 521 - 524.
WU Zhao-chun. Finite difference approach to single-phase Stefan problems by using fixed-time step and variable space interval method [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2003, 20(6): 521 - 524.
- [11] Caldwell J, Kwan Y Y. A brief review of several numerical methods for one-dimensional Stefan problems [J]. Thermal Science, 2009, 13(2): 61 - 72.
- [12] Mennig J, Özişik M N. Coupled integral equation approach for solving melting or solidification [J]. International journal of heat and mass transfer, 1985, 28(8): 1481 - 1485.
- [13] 刘永杰, 令 锋. 边界条件随时间变化 Stefan 问题的一种热平衡积分解法 [J]. 内蒙古大学学报: 自然科学版, 2010, 41(6): 625 - 631.
LIU Yong-jie, LING Feng. A heat balance integral method for the Stefan problem with time-dependent boundary conditions [J]. Journal of Inner Mongolia University: Natural Science Edition, 2010, 41(6): 625 - 631.

(丛 敏 编辑)

When R22 is used as the working medium for the cycles ,the heat exchange corresponding to the unit net output power will be minimum. **Key words:** trans-critical organic Rankine cycle ,steam compression refrigeration cycle , flue gas waste heat ,composite system

边界热源随时间变化的融化问题的数值模拟 = Numerical Simulation of the Melting Problem of the Boundary Heat Source Changing with Time [刊 ,汉] QU Liang-hui ,XING Lin ,YU Zhi-yun (College of Sciences , Zhongyuan University of Technology ,Zhengzhou ,China ,Post Code: 450007) ,LING Feng (College of Mathematics and Statistics ,Zhaoqing University ,Zhaoqing ,China ,Post Code: 526061) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. -2015 ,30(5) . -689 -695

According to the idea of the method to fix the time interval and step and through considering the time required when the moving interface presses forwards each time by a fixed distance ,a constant space and step method was established to solve the one-dimensional single-phase melting problems of boundary heat sources changing with time. The movement of the moving interface and the temperature field inside the working medium during the phase change process under the condition of three boundary heat sources were numerically simulated and the features of the phase change under various boundary heat sources were analyzed. A comparison and analysis of the numerical simulation results show that it is feasible to seek solutions to the one-dimensional melting problem of boundary heat sources changing with time by using both fixed space and step method and fixed time and step method and both methods have a relatively high precision. **Key words:** melting ,phase change ,moving interface ,temperature ,numerical simulation

边壁振动对燃气涡轮叶片内部冷却影响的场协同分析 = Field Synergy Analysis of the Influence of the Side Wall Vibration on the Internal Cooling of Blades in a Gas Turbine [刊 ,汉] SHEN Jia-huan ,SONG Ping , WANG Hong-guang (College of Energy Source and Power Engineering ,Shanghai University of Science and Technology ,Shanghai ,China ,Post Code: 200093) //Journal of Engineering for Thermal Energy & Power. -2015 ,30 (5) . -696 -701

By using the dynamic grid technology adopted in the software Fluent ,numerically simulated was the convection-based heat exchange process in a two-dimensional rectangular channel between the cooling air and the wall surfaces